

# PROPOSTA DE LIVRO DIDÁTICO PARA O ESTUDO DA DINÂMICA NOS CURSOS TÉCNICOS: MECATRÔNICA, ELETRÔNICA, ELETROTÉCNICA E ÁREAS AFINS



## Módulo 1 – Campos Gravitacional e Elétrico

## PREFÁCIO

A duas razões para este livro. Em primeiro lugar, mostrar a natureza interdisciplinar da Física e em segundo lugar, mostrar aos alunos do ensino médio que a Física está em tudo que vivemos e como nós podemos usá-la.

O livro foi organizado em oito capítulos direcionado para o segundo semestre da primeira série do Ensino Médio das escolas técnicas cujo foco são cursos de Mecatrônica, Eletrotécnica e áreas afins. O conteúdo aqui descrito propõe a introdução de novos conteúdos já na primeira série do ensino médio no componente curricular de Física, de forma a preservar também os outros conteúdos tradicionais. Não enchemos o texto com demasiados pormenores, onde os mesmos podem ser encontrados em outros livros.

O capítulo 1 tem o propósito de fazer o estudo dos movimentos de partículas, iniciando com as definições fundamentais de vetor posição, velocidade e aceleração vetorial média e instantânea e através do efeito dinâmico das forças apresentamos as três leis de Newton para o movimento dos corpos. O capítulo 2 relaciona os movimentos de partículas nos campos gravitacional e elétricos uniformes, juntamente com o movimento circular, salientando as semelhanças e diferenças nas propriedades das partículas em movimento nesses campos. No capítulo 3 temos uma introdução ao campo magnético, com enfoque principal nos conceitos mínimos que possam oferecer ao aluno condições de caminhar bem ao estudar a disciplina eletricidade concomitantemente. O Capítulo 4 traz conteúdo da Conservação de Energia onde o estudante uma vez conhecedor das leis de Newton, movimento de corpos, ações de campos gravitacionais, elétricos e magnéticos terá uma melhor compreensão de sistemas físicos ideias e o princípio da conservação da energia. O Capítulo 5 estuda o Movimento Circular Uniforme a partir do resultado experimental do movimento de partículas no interior do campo magnético, ou seja, usando exemplos de conteúdos anteriores. O Capítulo 6 desenvolve estudo dos movimentos através de análises gráficas, onde o aluno colocará em prática o conteúdo anterior apresentado, de forma a tornar o aprendizado significativo quanto ao estudo de funções. O capítulo 7 envolve basicamente o conteúdo de colisões entre partículas, definições de momento linear de uma e de um sistema de partículas, de impulso de uma força, sistema isolado nos levam à conservação do momento linear característica das colisões. O enfoque dado ao capítulo foi o mesmo encontrado nos livros tradicionais, pois não fizemos nenhuma conexão com os novos conteúdos propostos para a primeira série do ensino médio. E finalmente no capítulo 8 o estudante tem possibilidade de desenvolver seu pensamento sobre as leis dos movimentos planetários e compreender conceitos fundamentais da ciência moderna.

Deve-se dizer, finalmente, que este livro apresenta conteúdo de grande interesse para estudantes de escolas técnicas e é resultado de um trabalho de

pesquisa meticoloso no qual o autor transmite-nos grandes ensinamentos para compreensão de conteúdos da Física e Matemática. Este trabalho é complementar a uma coletânea de livros desenvolvidos pelo Programa de Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (MNPEF) polo 04 – IFAM/UFAM.

Sidomar Pirrony Rodrigues de Oliveira

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Prof. Dr. Wagner Antônio da Silva Nunes pela orientação, recomendações e profissionalismo no desenvolvimento deste livro, obrigado por trabalharmos juntos.

Aos amigos professores Ewerton, Glauber Pires, Luiz Eduardo e Sandiego que colaboraram para o refinamento da escrita deste livro.

Aos professores do Programa Nacional de Mestrado em Ensino de Física polo 04 IFAM/UFAM.

Aos meus pais: Sidomar Gonçalves de Oliveira - pelos conselhos, apoio, confiança e paciência e Maria de Fátima Rodrigues de Oliveira - pelo amor, carinho e alegria.

À minha esposa Caroline Santana de Souza pelo amor incondicional, pela sinceridade, pelo apoio, amizade e pelos momentos de felicidades e alegrias.

À CAPES, cujo apoio financeiro foi fundamental para a realização do presente trabalho.

A meus alunos, razão de meu esforço e sem os quais este trabalho não teria sentido.

Muito obrigado!

# SUMÁRIO

<b>Cap.1 .....</b>	<b>10</b>
<b>Dinâmica dos Movimentos.....</b>	<b>10</b>
Introdução .....	10
Velocidade e Aceleração Vetoriais .....	12
Velocidade Vetorial Média $vm$ .....	16
Por que a Velocidade Vetorial Instantânea é Tangente à Curva em cada Ponto? .....	19
Aceleração Vetorial Média $am$ .....	21
Aceleração Vetorial Instantânea $a$ .....	21
Efeito Dinâmico das Forças .....	22
Leis do Movimento de Newton.....	23
Primeira Lei de Newton do Movimento.....	23
Segunda Lei de Newton do Movimento.....	27
Diagrama de Corpo Livre.....	28
Terceira Lei de Newton do Movimento .....	29
Estado de Equilíbrio de uma Partícula .....	30
Força de Reação Normal $N$ .....	30
Reação à Força Peso.....	31
Forças de Atrito de Escorregamento .....	32
Verificação Experimental entre as Intensidades da Força de Atrito e da Força Normal.....	34

Força de tração $T$ .....	35
Movimento sob a Ação de uma Força Constante.....	36
Velocidade Média no M.R.U.V. ....	38
Equação de Torricelli .....	40
Movimento Retilíneo e Uniforme M.R.U. ....	43
Exercícios do Capítulo 1 .....	50
<b>Cap. 2</b> .....	<b>54</b>
<b>Movimento de Partículas em Campos <math>g</math> e <math>E</math></b> .....	<b>54</b>
Introdução .....	54
Lançamentos de Partículas no Interior do Campo $g$ Uniforme .....	55
Lançamento vertical para cima ou para baixo.....	56
Orientação da trajetória. Sinal de $g$ .....	57
Equações do Movimento.....	59
Interpretação do Movimento Parabólico como dois Movimentos Retilíneos Independentes .....	65
Equações do Movimento Parabólico.....	69
Movimento Horizontal: M.R.U.....	69
Movimento Vertical: M.R.U.V.....	69
Fórmulas da Altura Máxima e do Alcance .....	70
Exercícios do Capítulo 2 .....	76
<b>Cap. 3</b> .....	<b>80</b>
<b>Campo Magnético</b> .....	<b>80</b>
Introdução .....	80
Inseparabilidade dos polos .....	82

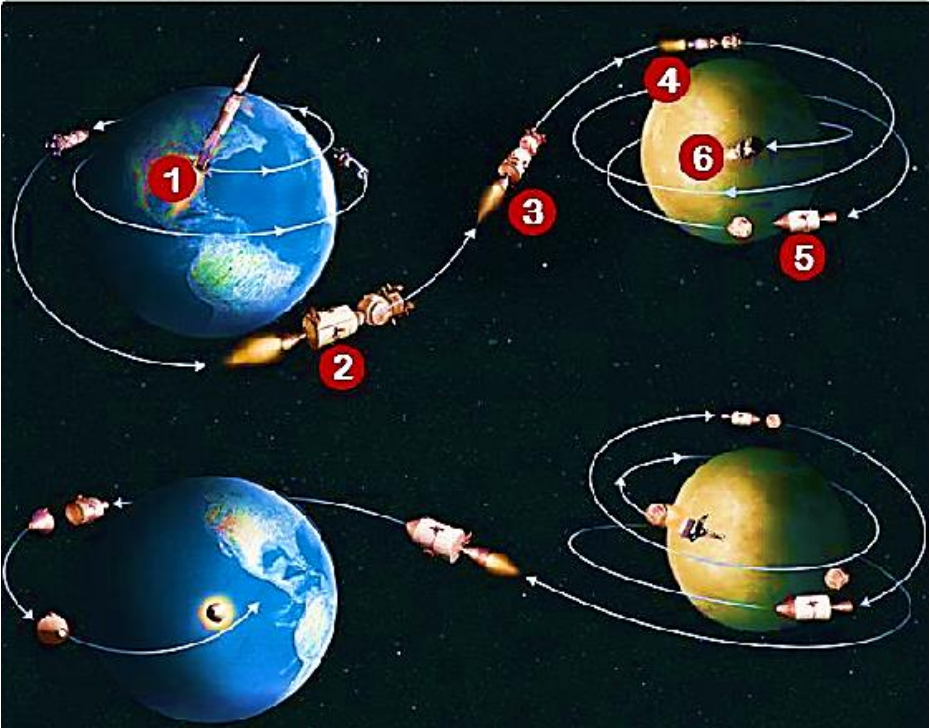
Campo magnético de correntes .....	83
A ação de campos magnéticos sobre cargas elétricas .....	83
Carga com velocidade inicial $v = 0$ .....	84
Carga lançada com velocidade inicial $v \neq 0$ . ....	84
Campo magnético uniforme.....	86
Campo de um fio longo.....	87
Campo de uma espira circular.....	90
Campo de um solenoide .....	91
Lei da Indução de Faraday .....	93
Exercícios do Capítulo 3.....	98
<b>Cap. 4 .....</b>	<b>103</b>
<b>A Conservação da Energia.....</b>	<b>103</b>
Introdução .....	103
Revisitando Trabalho de uma Força .....	103
Teorema da Energia Cinética (T.E.C.).....	105
Potência Média e Potência Instantânea .....	107
Trabalho da Força Peso e Energia Potencial Gravitacional .....	110
Trabalho da Força Elástica e Energia Potencial Elástica .....	111
Exercícios do Capítulo 4 .....	119
<b>Cap. 5 .....</b>	<b>124</b>
<b>Dinâmica do Movimento Circular Uniforme.....</b>	<b>124</b>
Introdução .....	124
Aceleração Centrípeta ( $ac_p$ ) e Força Centrípeta.....	126
Movimento Helicoidal .....	128

Função horária da posição no MCU.....	129
Aceleração Centrípeta e Força Centrípeta em Função da Velocidade Angular.....	132
Período e Frequência.....	135
Exercícios do Capítulo 5 .....	139
<b>Cap. 6 .....</b>	<b>145</b>
<b>Estudo Gráfico dos Movimentos .....</b>	<b>145</b>
Introdução .....	145
Função do Primeiro Grau .....	146
Função do 1º Grau Crescente e Decrescente.....	147
Construção do Gráfico da Função do 1º Grau.....	147
Função Constante .....	148
Função do Segundo Grau .....	149
Gráficos do M.R.U. ....	150
Gráficos do M.R.U.V. ....	153
Gráfico da Aceleração Escalar .....	154
Propriedade no Gráfico da Aceleração .....	156
Gráfico da Velocidade Escalar.....	157
Gráfico da Posição Escalar.....	162
Exercícios do Capítulo 6 .....	165
<b>Cap. 7 .....</b>	<b>170</b>
<b>A Conservação do Momento Linear .....</b>	<b>170</b>
Introdução .....	170
Momento Linear de uma partícula .....	173

Teorema do Impulso .....	174
Momento Linear do sistema formado por duas partículas .....	179
Princípio da Conservação do Momento Linear .....	180
Colisões .....	182
Colisões Elásticas Unidimensionais .....	182
Colisões Inelásticas Unidimensionais .....	185
Coeficiente de Restituição .....	186
Exercícios do Capítulo 7 .....	191
<b>Cap. 8 .....</b>	<b>196</b>
<b>O Movimento de Planetas e Satélites .....</b>	<b>196</b>
Introdução .....	196
De volta à Força de atração Gravitacional .....	197
As três leis de Kepler para o movimento dos planetas .....	199
Primeira Lei de Kepler – Lei das Órbitas .....	200
Segunda Lei de Kepler – Lei das Áreas .....	202
Newton e a Lei dos Períodos de Kepler .....	206
Satélite Geoestacionário .....	207
A grande sacada de Newton .....	208
Exercícios do Capítulo 8 .....	212

# Cap.1

## Dinâmica dos Movimentos



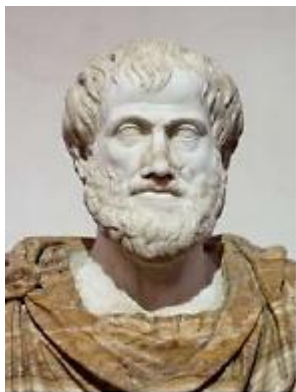
Movimento de um Satélite em órbita ao redor da Terra.

### Introdução

Estudaremos o efeito dinâmico das forças, isto é, a modificação na velocidade das partículas quando são submetidas a forças. Disto trata a parte da Mecânica chamada de Dinâmica da partícula. Basicamente este capítulo trata da resolução do chamado Problema Fundamental da Dinâmica (P.F.D.): Sendo conhecidas as forças que atuam

sobre a partícula e as propriedades da mesma queremos entender como e porque ela se move de determinada maneira.

Estamos interessados particularmente no movimento de partículas sob a ação de forças consideradas constantes, o que nos levará a caracterizar um tipo de movimento chamado de M.R.U.V., e seu caso particular (o M.R.U.) que ocorre quando não há forças sobre a partícula. Faremos simultaneamente tanto a descrição do movimento quanto a caracterização de suas causas, supondo conhecidas as forças.



O conjunto de Leis que descrevem o movimento quando as interações são conhecidas<sup>2</sup> são chamadas de Leis do Movimento de Newton. Sempre foi de grande interesse, desde a antiguidade, o entendimento do movimento dos corpos, sobretudo o movimento dos corpos celestes, tais como planetas, satélites naturais, estrelas, cometas, etc... Por exemplo, a explicação sobre as fases da Lua já era conhecida desde o tempo de Aristóteles (384 – 322 A. C.), que verificou que a forma da Lua observada da Terra dependia da posição relativa Terra – Sol – Lua.

**Figura 1. 1** – Aristóteles.

Para Aristóteles a velocidade que os corpos possuíam, estavam intrinsecamente associadas à ideia de força. Seria então impossível um corpo possuir velocidade sem que forças estivessem agindo sobre ele. Essa ideia, proposta por Aristóteles, permaneceu viva até a Idade Média. Coube a Galileu Galilei, no século XVII, tornar mais claro o entendimento sobre o movimento dos corpos. Galileu Galilei nasceu na cidade de Piza, na Itália no ano de 1564. Em 1592, Galileu produziu um manuscrito intitulado *De Motu (O Movimento)* no qual se contrapõe à visão aristotélica sobre o movimento dos corpos.

Ele foi levado a isso quando introduziu o *método experimental*. Para ele as leis do movimento dos corpos não podiam ser provadas baseando-se apenas na observação, mas sim por provas constituídas de forma matemática e nas evidências experimentais.

---

<sup>2</sup> E também das propriedades das partículas tais como, sua massa, carga elétrica, etc.

Para Galileu, um corpo já em movimento, após ser impulsionado por uma força, só irá parar se forças externas forem aplicadas sobre ele. Uma vez que essas forças não atuassem o corpo ficaria em movimento perpétuo. Desta forma, as experimentações feitas por Galileu o levaram a concluir que as forças não estão relacionadas com a velocidade em si, mas com a sua variação.

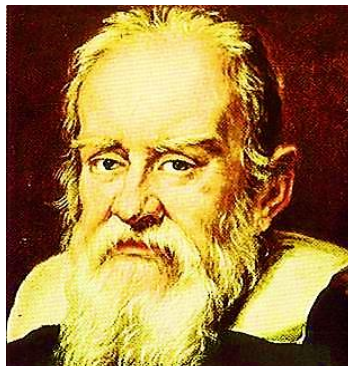


Figura 1. 2 - Galileu Galilei.

Para Galileu o estado de repouso dos corpos é tão natural quanto o seu movimento retilíneo. Não sendo impelido por forças, esses estados se perpetuariam.

Anos mais tarde, Isaac Newton publica a sua obra intitulada *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* (1687), no qual concorda com os argumentos de Galileu, e enuncia as suas três leis do movimento. Essa obra é considerada o livro de ciências naturais de maior impacto na civilização.

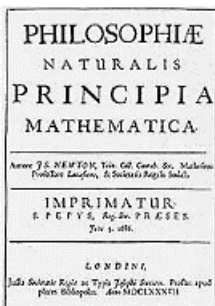


Figura 1. 3 - *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*

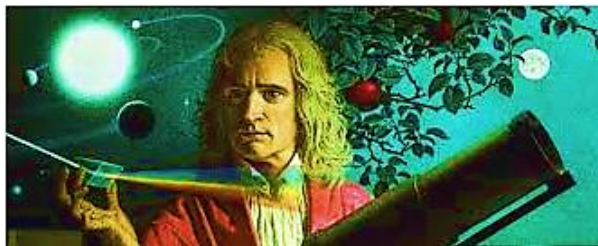


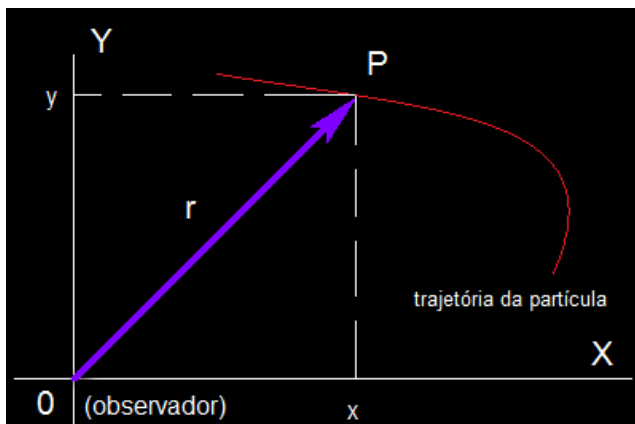
Figura 1. 4 - Isaac Newton.

## Velocidade e Aceleração Vetoriais

Considere um sistema de referência fixo constituído por dois eixos ( $OX$  e  $OY$ ) perpendiculares entre si e que se interceptam em  $O$  (origem do sistema de referência). Na origem situa-se um observador que a cada instante

acompanha o estado de movimento de uma partícula material P. Definimos **VETOR POSIÇÃO**  $\vec{r}$ , ao vetor que liga a origem do sistema de coordenadas à partícula P. Ele depende da escolha (arbitrária) da origem do sistema de coordenadas.

Se com o transcorrer do tempo o vetor posição é constante (independente do tempo),  $\vec{r} = \vec{r}_0$ , dizemos que a partícula está em *repouso* em relação ao observador O. Dizemos que a partícula está em *movimento*, com relação ao observador O, se a sua posição varia com o transcorrer do tempo. Dizemos com isto que o vetor  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  é uma função do tempo.



**Figura 1. 5** - Trajetória descrita pelo ponto objeto P e o sentido do seu movimento com relação ao observador situado em O.

Figura 1.5 mostra a trajetória descrita pelo ponto objeto P e o sentido do seu movimento com relação ao observador situado em O. A trajetória da partícula também depende do observador, pois, diferentes observadores indicam diferentes trajetórias para a mesma partícula.

Definimos o **VETOR DESLOCAMENTO**  $\overline{\Delta r}$  de uma partícula, à diferença entre duas posições ocupadas pela mesma. Chamando de  $\vec{r}$  a posição da partícula no instante t,  $\vec{r}_0$  sua posição em  $t = t_0$  escrevemos para o deslocamento entre esses dois instantes:

$$\overline{\Delta r} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

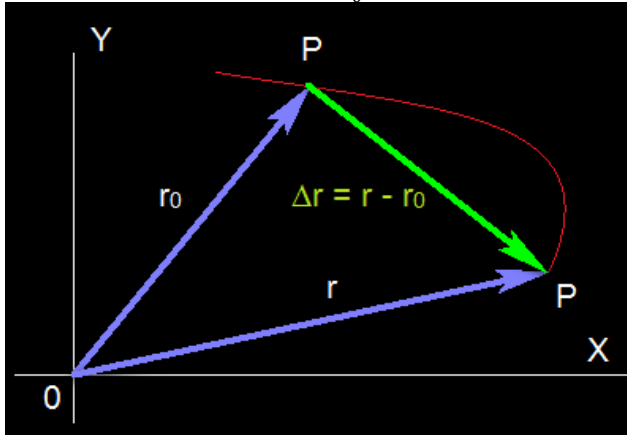


Figura 1. 6 - Representação do Vetor Deslocamento  $\overline{\Delta r}$ .

Enquanto a partícula se movimentar, a extremidade do seu vetor posição  $\vec{r}$  descreve uma curva chamada de *trajetória* da partícula. A linha vermelha na Podemos calcular o comprimento do vetor  $\Delta\vec{r}$ , que indicaremos por  $\Delta r$ , com o auxílio da Lei dos cossenos:

$$\Delta r^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0r \cos\alpha. \tag{1.1}$$

Ou ainda, usando a Lei dos senos:

$$\frac{r_0}{\text{sen } \beta} = \frac{r}{\text{sen } \gamma} = \frac{\Delta r}{\text{sen } \alpha}. \tag{1.2}$$

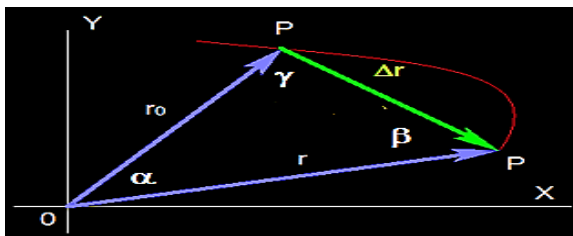
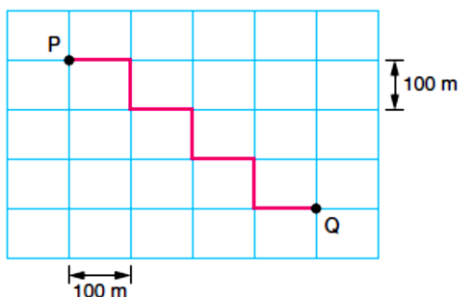


Figura 1. 7 - Comprimento do vetor  $\Delta\vec{r}$ .

A unidade de medida para a intensidade do deslocamento escalar é a mesma de comprimento, a saber, milímetro (mm), centímetro (cm), metro (m), quilômetro (km), etc... No Sistema Internacional de unidades  $\Delta r$  é medido em metros.

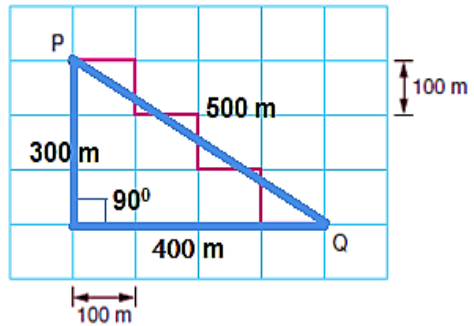
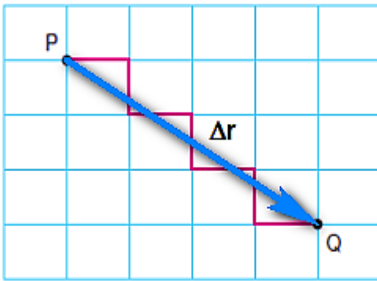
### Exercício Resolvido

(PUCC-SP) Num bairro, onde todos os quarteirões são quadrados e as ruas paralelas distam 100 m uma da outra, um transeunte faz o percurso de P a Q pela trajetória representada no esquema. Calcule o módulo do deslocamento vetorial executado pelo transeunte.



### Solução

O vetor deslocamento é o vetor com origem no ponto inicial P e extremidade no ponto final Q. Seu módulo é a medida da hipotenusa do triângulo retângulo de lados 300 m e 400 m. Pelo teorema de Pitágoras a medida da hipotenusa é 500 m.



### Velocidade Vetorial Média $\vec{v}_m$

Definimos a velocidade vetorial média da partícula, com relação ao observador O, à razão entre o vetor deslocamento  $\vec{\Delta r}$  sofrido pela partícula e o intervalo de tempo  $\Delta t$  necessário para que o deslocamento ocorra. Matematicamente escrevemos:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad 1.3$$

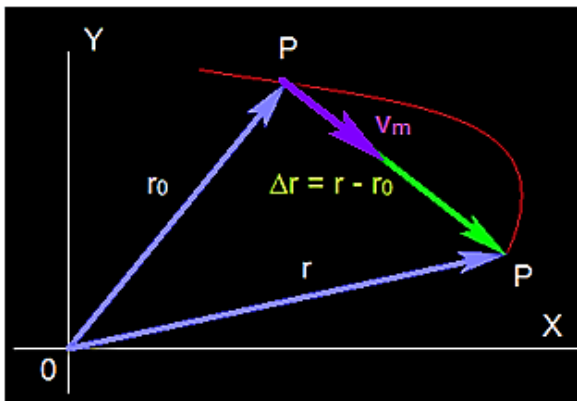


Figura 1. 8 - Velocidade vetorial média da partícula, com relação ao observador O.

As características do vetor velocidade vetorial média  $\vec{v}_m$  são:

- Direção: a mesma do deslocamento vetorial
- Sentido: o mesmo do deslocamento vetorial
- Intensidade:  $v_m = \|\vec{v}_m\| = \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta t}$

A velocidade vetorial média é a velocidade vetorial constante que, durante o mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , produz o mesmo deslocamento vetorial  $\Delta\vec{r}$  quando o movimento se processa com velocidade não constante.

A unidade de velocidade vetorial média é a razão entre as unidades de comprimento e de tempo. Por exemplo, pode ser metro/ segundo (m/s), quilômetro /hora (km/h), centímetro/dia (cm/dia), etc... No S.I. a unidade de velocidade média é o m/s. A unidade km/h também é bastante usada e sua relação com m/s é a seguinte:

1 km = 1000 m e 1h = 3600 s

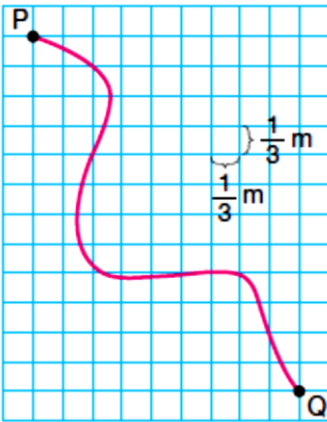
$$1 \frac{km}{h} = \frac{1000 m}{3600 s} = \frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$$
$$1 \frac{m}{s} = 3,6 \frac{km}{h}$$

### Em resumo:

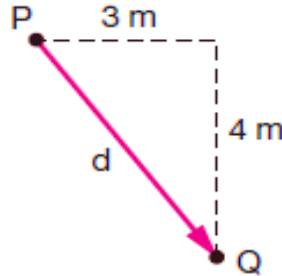
“Para transformar de  $\frac{km}{h}$  para  $\frac{m}{s}$  dividimos por 3,6 e de  $\frac{m}{s}$  para  $\frac{km}{h}$  multiplicamos por 3,6”.

### Exercício Resolvido

(FIUBE - MG) Na figura está representada a trajetória de um móvel que vai do ponto  $P$  ao ponto  $Q$  em 5 s. O módulo de sua velocidade vetorial média, em metros por segundo e nesse intervalo de tempo, é igual a:



## Solução



$$d^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow d = \sqrt{25} \rightarrow d = 5 \text{ m}$$

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{5}{5} = 1 \text{ m/s}$$

Velocidade Vetorial instantânea  $\vec{v}$

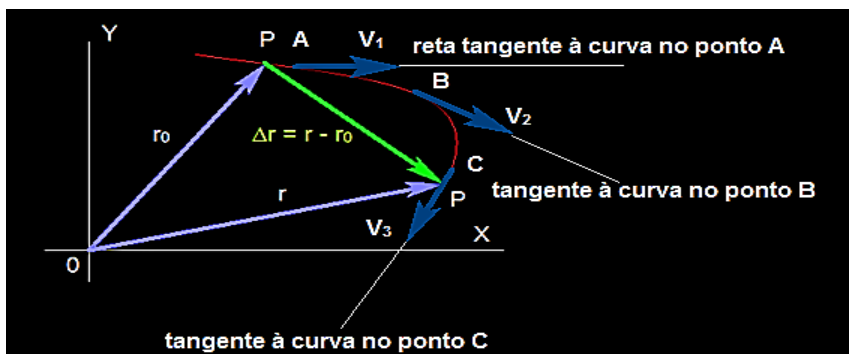
Definimos a **velocidade vetorial instantânea**  $\vec{v}$  fazendo o intervalo de tempo  $\Delta t$  tender a zero no cálculo da velocidade vetorial média, isto é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad 1.4$$

A direção de  $\vec{v}$  é tangente à trajetória em cada ponto.

A Figura 1.9 mostra a trajetória da partícula P e três pontos, A, B e C, na mesma, onde desenhamos os vetores velocidade  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ , respectivamente. A direção de cada um deles é sempre tangente à curva no ponto considerado.

“O vetor velocidade vetorial instantânea é sempre tangente à trajetória da partícula em cada ponto.”

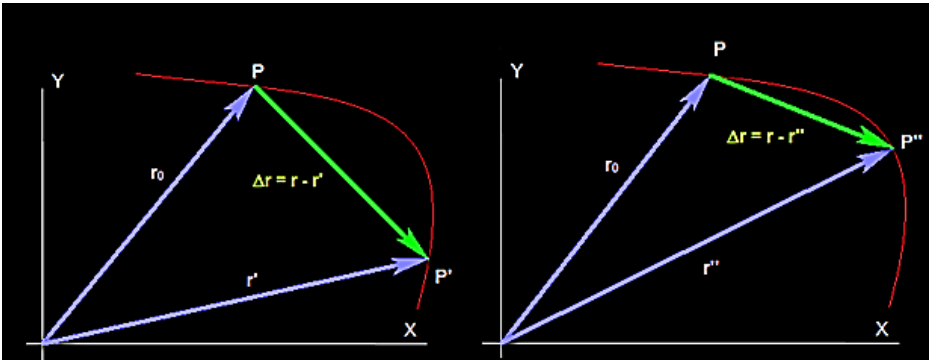


**Figura 1. 9** - Trajetória da partícula P e três pontos, A, B e C, na mesma, onde desenhamos os vetores velocidade  $\vec{v}_1$ ,  $v_2$  e  $\vec{v}_3$ , respectivamente.

Enquanto a velocidade vetorial média é calculada após ter-se transcorrido um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade vetorial instantânea é calculada em cada instante de tempo  $t$ . Ela dá sempre uma informação mais precisa do movimento do que a velocidade vetorial média. Por exemplo no trajeto de ônibus de sua casa até a escola, possivelmente o veículo tenha parado no ponto para apanhar passageiros ou no sinal vermelho. A velocidade do ônibus não foi sempre a mesma. Se calcularmos a velocidade vetorial média do ônibus no percurso casa escola, ela nunca nos dará a informação sobre as paradas, enquanto a velocidade vetorial instantânea em cada tempo  $t$  nos dirá tudo isto.

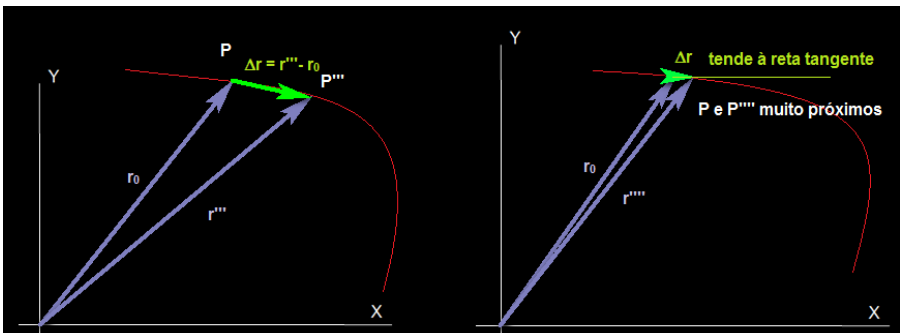
### Por que a Velocidade Vetorial Instantânea é Tangente à Curva em cada Ponto?

Para responder esta pergunta vamos calcular o deslocamento vetorial, pois a direção dele é a mesma da velocidade vetorial média. Faremos essa operação usando dois pontos P, P', P'', P''' e P'''''. P é um ponto fixo onde queremos calcular a velocidade vetorial instantânea e P', P'', P''' e P'''' são pontos sobre a curva cada vez mais próximos de P. Vamos mostrar que a medida que esses pontos ficam mais próximos do ponto fixo P, o deslocamento vetorial tende à reta tangente à curva em P.



**Figura 1. 10** - Ilustração do ponto fixo P à medida que pontos ficam mais próximos de P, o deslocamento vetorial tende à reta tangente à curva em P.

No limite, os dois pontos serão tão próximos quanto desejarmos e a velocidade vetorial média tenderá à velocidade vetorial calculada num único ponto. Essa é a velocidade vetorial instantânea.



**Figura 1. 11** - Velocidade vetorial instantânea.

No caso em que o movimento se processa numa trajetória retilínea a direção da velocidade é sempre a mesma, podendo mudar somente em sentido e intensidade.

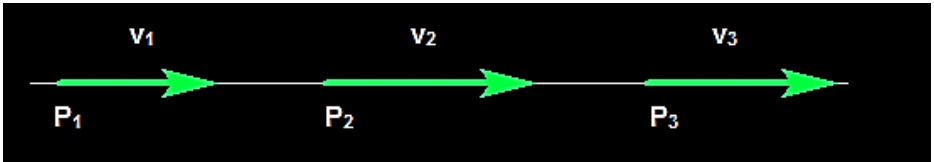


Figura 1. 12 - Trajetória retilínea.

### Em resumo:

A **direção da velocidade vetorial instantânea**  $\vec{v}$  em cada ponto da trajetória é sempre a direção da reta tangente à curva nesse ponto. Ela é encontrada tomando o limite da velocidade vetorial média entre dois pontos infinitamente próximos, ou seja, quando  $\Delta t$  (o intervalo de tempo de passagem da partícula por esses pontos) tende a zero.

Seu **sentido** é o sentido de movimento da partícula.

### Aceleração Vetorial Média $\vec{a}_m$

Definimos o vetor aceleração vetorial média  $\vec{a}_m$  como a razão entre a variação de velocidade vetorial e o intervalo de tempo  $\Delta t$  necessário

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad 1.5$$

As características do vetor aceleração vetorial média  $\vec{a}_m$  são:

Direção: a mesma de  $\Delta \vec{v}$

Sentido: o mesmo de  $\Delta \vec{v}$

Intensidade:  $\|\vec{a}_m\| = \frac{\|\Delta \vec{v}\|}{\Delta t}$

### Aceleração Vetorial Instantânea $\vec{a}$

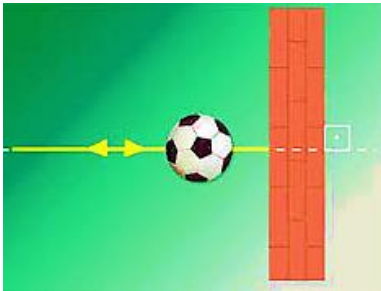
Definimos a *aceleração vetorial instantânea*  $\vec{a}$  fazendo o intervalo de tempo  $\Delta t$  tender a zero no cálculo da aceleração vetorial média, isto é:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad 1.6$$

A unidade de aceleração vetorial no S.I. é metro por segundo ao quadrado ( $\text{m/s}^2$ ). Também é muito usada a unidade  $\text{km/h}^2$ .

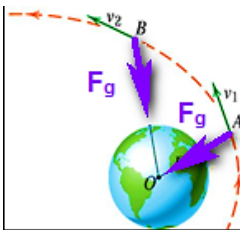
## Efeito Dinâmico das Forças

Uma força que atua sobre uma partícula, produz sobre esta, alteração no estado de seu movimento. Queremos dizer com isto, que a partícula sofrerá uma *alteração* em sua velocidade vetorial  $\vec{v}$  quando for submetida a ação de forças. Essa alteração em sua velocidade vetorial poderá ser em intensidade, em direção e em sentido. Por exemplo, vemos na Figura 1.13 uma bola que é lançada perpendicularmente contra uma parede. Antes de chocar-se com a parede a bola movia-se com o sentido de sua velocidade vetorial  $\vec{v}$  para a direita e após a colisão o sentido é invertido em decorrência da interação. A força de contato entre a bola e a parede é a responsável pela *mudança de sentido* da velocidade vetorial  $\vec{v}$ .



**Figura 1. 13** - Bola lançada perpendicularmente contra uma parede.

Outro exemplo é a interação entre um satélite que está sendo colocado em órbita e a Terra, através da **força gravitacional  $F_g$** . Vemos claramente que a velocidade do satélite muda em *direção* em decorrência dessa interação. Ao ser puxado para o centro da Terra pela força gravitacional, a velocidade do satélite muda de  $\vec{v}_1$  no ponto A para  $\vec{v}_2$  no ponto B. Essa mudança ocorre pelo menos em direção, passando da tangente à trajetória no ponto A para a nova tangente no ponto B.



**Figura 1. 14** - Satélite que está sendo colocado em órbita e a Terra.

Como exemplo na mudança na *intensidade* da velocidade vetorial  $\vec{v}$ , temos o lançamento do ônibus espacial. A força exercida pelo conjunto de seus três motores, produzem uma grande variação na *intensidade* vetorial, sendo levado da velocidade zero até sua incrível velocidade máxima de 28.000 km/h já em sua órbita ao redor da Terra



**Figura 1. 15** - Lançamento de ônibus espacial.

### **Concluimos dizendo:**

“O efeito dinâmico das forças enquanto atuam sobre os corpos é produzir mudança em sua velocidade vetorial, que poderá ser em intensidade, direção e sentido”.

## **Leis do Movimento de Newton**

Isaac Newton é considerado uma das mentes mais brilhantes de todos os tempos. Sua influência na história da ciência de nossa civilização é gigantesca. Suas capacidades de intuição, abstração e sistematização das informações foram impressionantes. Ele contribuiu enormemente para o nosso conhecimento atual sobre os movimentos dos corpos, através da construção da chamada *Mecânica Newtoniana*, onde, sistematizou as três leis para o movimento dos corpos, incluindo os corpos celestes, onde a comprovação experimental de suas previsões foi fenomenal.

### **Primeira Lei de Newton do Movimento**

É também conhecida como lei da inércia.

Uma partícula livre da ação de forças não pode, por si só, alterar o seu estado de movimento. Não pode trocar de velocidade.

Da primeira lei do movimento de Newton, vemos que a interpretação dinâmica da noção de força é uma interação que produz modificação no

estado de movimento das partículas, sob as quais atua. Não havendo forças sobre as partículas o seu estado de movimento *permanece inalterado*. Se a partícula está inicialmente em repouso, permanecerá em repouso mantendo sua velocidade vetorial nula. Se a partícula está em movimento permanecerá com velocidade vetorial constante, isto é, com mesma intensidade, mesma direção e mesmo sentido. Este é o caso do Movimento Retilíneo e Uniforme (M.R.U.).

A visão expressa na primeira lei de Newton para o movimento concorda exatamente com a visão proposta por Galileu. A noção de força não está associada à velocidade e sim a sua variação. Não havendo forças os dois estados naturais que a partícula pode ter, o repouso e o movimento retilíneo uniforme, não podem ser alterados e existirão indefinidamente. Chamamos essa capacidade que os corpos apresentam em permanecer, nos seus estados naturais de repouso ou M.R.U. de inércia.

**Inércia é a tendência natural que os corpos possuem em permanecer em seus dois possíveis estados naturais, a saber, o de repouso ou M.R.U.**

Uma propriedade inerente aos corpos é a massa. Todos os corpos possuem massa. Quanto maior a massa dos corpos maior é a sua inércia, isto é, maior será a sua resistência a qualquer alteração no seu estado de movimento. Como exemplos de inércia em nosso cotidiano, consideremos os seguintes casos. No primeiro um ônibus se desloca em linha reta com velocidade constante  $\vec{v}$ . Todos os objetos e corpos no seu interior possuem a mesma velocidade vetorial, inclusive os passageiros mostrados na figura. A força sobre cada um deles é nula.

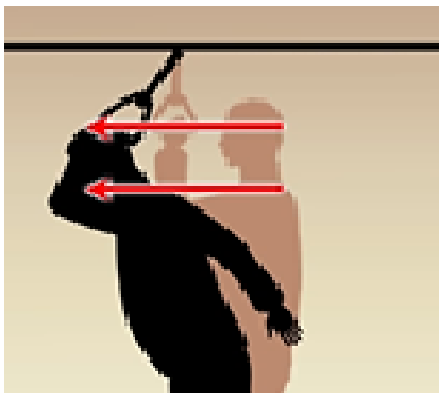


**Figura 1. 16** - Ônibus se desloca em linha reta com velocidade constante  $\vec{v}$ . Todos os objetos e corpos no seu interior possuem a mesma velocidade vetorial, inclusive os passageiros.

Enquanto a força sobre eles for nula eles se manterão, por inércia, nessa mesma condição.

De repente o motorista freia o ônibus diminuindo a intensidade de sua velocidade vetorial. A resistência à variação dessa velocidade aparece sobre o passageiro, pois este se desloca para frente tentando preservar a mesma velocidade vetorial que possuía antes da frenagem. Esta é a inércia.

No segundo exemplo, uma bola repousa sobre um pequeno pedaço de madeira que a impede de cair no interior de um copo. De repente alguém puxa rapidamente o pedaço de madeira e a bola cai no interior do copo. O fato de puxarmos rapidamente a madeira impede que a bola sofra variação de velocidade vetorial na direção do movimento da madeira. Isto é explicado pela inércia.



**Figura 1. 17** - Passageiro, se desloca para frente tentando preservar a mesma velocidade vetorial que possuía antes da frenagem do ônibus.



**Figura 1. 18** - O motorista acelera para frente o ônibus no instante que possuía a velocidade vetorial  $\vec{v}$ , o passageiro é lançado para trás, tentando resistir a essa variação de velocidade.

Se agora a intensidade da velocidade vetorial é aumentada, isto é o motorista acelera para frente o ônibus no instante que possuía a velocidade vetorial  $\vec{v}$ , o passageiro é lançado para trás, tentando resistir a essa variação de velocidade. Esse comportamento é explicado pela inércia.



**Figura 1. 19** - Uma bola repousa sobre um pequeno pedaço de madeira que a impede de cair no interior de um copo.



**Figura 1. 20** - De repente alguém puxa rapidamente o pedaço de madeira e a bola cai no interior do copo.

## Segunda Lei de Newton do Movimento

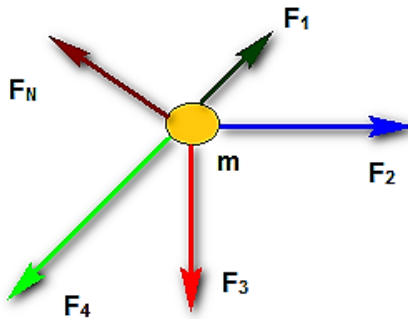
Já sabemos, pelo princípio da inércia, o que ocorre com os corpos quando estão livres da ação de forças: sua velocidade vetorial é inalterada.

O que ocorre então se o corpo está submetido a ação de forças? Isso é o que trata a Segunda Lei de Newton para o Movimento.

Essa lei é também conhecida como Princípio Fundamental da Dinâmica. Podemos enuncia-lo da seguinte forma:

A soma vetorial de todas as forças que atuam sobre uma partícula, chamada de resultante das forças, é igual ao produto de sua massa pela aceleração adquirida.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N = m\vec{a} \quad 1.7$$



**Figura 1. 21** - Forças sobre uma partícula.

Observe do enunciado que possuímos duas maneiras de calcular a resultante das forças sobre uma partícula. A primeira é através da soma vetorial de todas as forças que sobre ela atuam,

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N, \quad 1.8$$

e, a segunda é através do produto da massa da partícula pela aceleração vetorial que adquire,

$$\vec{F}_R = m\vec{a}. \quad 1.9$$

Sob o ponto de vista da Dinâmica, a força resultante é a força que agindo *sozinha* sobre a partícula produz o mesmo efeito que o sistema formado por várias forças que agem simultaneamente sobre a mesma. Não há como diferenciar os efeitos da resultante e do sistema de forças enquanto agem sobre a mesma partícula.

Em resumo:

A força resultante sobre a partícula é o vetor soma de todas as forças que agem simultaneamente sobre ela:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N.$$

A força resultante sobre a partícula sempre tem a mesma direção e sentido que a aceleração, pois, é dada pelo produto do escalar massa (sempre de valor positivo) e do vetor aceleração:

$$\vec{F}_R = m\vec{a}.$$

Da segunda lei, vemos que a aceleração da partícula obedece a uma relação de causa e efeito, pois:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}. \quad 1.10$$

Veja na equação acima que se a resultante das forças for constante (causa) a aceleração da partícula será também constante (efeito). Compare ainda com a definição de aceleração vetorial média,

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad 1.11$$

o que torna claro quando dizemos que o efeito dinâmico das forças é produzir variação de velocidade nos corpos.

## Diagrama de Corpo Livre

Na resolução do P.F.D. todas as forças que atuam sobre a partícula devem ser conhecidas. Um diagrama de forças, conhecido como *diagrama de corpo livre* deve ser construído para a partícula. Nele a direção e o sentido de cada força deve ser corretamente explicitada, e a partir disto desenhamos a resultante.

## Terceira Lei de Newton do Movimento

É também conhecida como princípio da ação e reação.

As forças na natureza sempre ocorrem aos pares, chamado de par ação e reação. As características dessas forças que caracterizam o par estão explícitas na terceira lei de Newton para o movimento, que podemos enunciar dizendo que:

“A cada ação corresponde uma reação de igual intensidade e direção, porém sentido contrário.”

Ao empurrar a sua espaçonave o astronauta exerce sobre esta uma força de intensidade  $F$  e sentido para a direita. Em oposição a esta força, a nave espacial exerce sobre o astronauta uma força de mesma intensidade e direção, porém de sentido contrário.

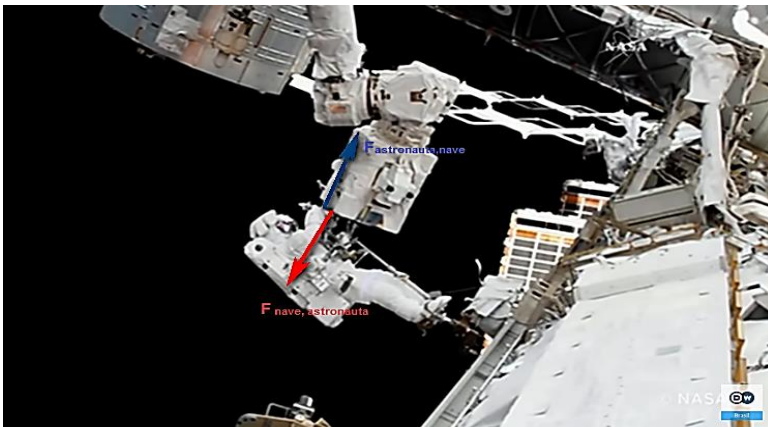


Figura 1. 22 - Par de forças ação e reação.

Neste caso o par de forças ação e reação são:

$$\vec{F}_{\text{astronauta, nave}} = - \vec{F}_{\text{nave, astronauta}} \quad 1.12$$

Observe que caracterizamos o par ação e reação quando as forças são entre os mesmos corpos: astronauta- nave e nave astronauta.

## Estado de Equilíbrio de uma Partícula

O primeiro estado de movimento de uma partícula que podemos caracterizar é conhecido como *estado de equilíbrio*. Dizemos que uma partícula está em equilíbrio dinâmico, em relação a um sistema de referência inercial, quando a sua velocidade vetorial não se modifica no tempo. Por isso enunciamos: Se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula se anula, em relação a algum sistema de referência inercial, sua velocidade vetorial não se modificará e ela será observada em repouso ou em movimento com velocidade vetorial constante.

Se a partícula é observada em repouso o estado de equilíbrio dela é chamado de equilíbrio estático.

Se ela é observada com velocidade vetorial constante esse estado de equilíbrio é chamado de equilíbrio dinâmico.

## Força de Reação Normal $\vec{N}$

A bola que está em repouso sobre a superfície de um gramado, sofre a ação da força gravitacional  $\vec{P}$  que tende a comprimi-la contra a superfície do solo. Essa força quer fazer com que a bola penetre à superfície. A superfície se opõe à penetração exercendo uma força para fora, de modo a expulsar a bola. Chamamos essa força de força normal  $\vec{N}$ .

As características da força de reação normal são:

- Direção: perpendicular à superfície de contato
- Sentido: apontando para fora da superfície
- Intensidade: a mesma da força que sobre ela age até o limite de ruptura
- É uma força de resistência à penetração



Figura 1. 23 - Forças que atuam sobre uma bola em repouso.

Embora as forças  $\vec{P}$  e  $\vec{N}$  tenham a mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos (visto que a bola permanece em repouso), elas não representam um par ação e reação, pois não envolvem o mesmo par de corpos.

$$\vec{F}_{superfície,bola} = \vec{N} \quad 1.13$$

$$\vec{F}_{Terra,bola} = \vec{P} \quad 1.14$$

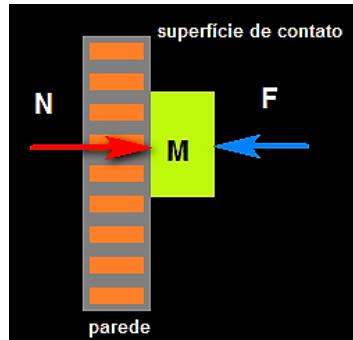
Neste caso, os pares ação e reação, são:

$$\vec{F}_{superfície,bola} = -\vec{F}_{bola,superfície} \quad 1.15$$

$$\vec{F}_{Terra,bola} = -\vec{F}_{bola,Terra} \quad 1.16$$

Da mesma forma, a força  $\vec{F}$  comprime o bloco de massa M contra uma parede de tijolos. A parede reage exercendo a força normal  $\vec{N}$ , que age na superfície de contato parede/bloco.

**Figura 1. 24** – (Imagem ao lado direito) Força  $\vec{F}$  comprime o bloco de massa M contra uma parede de tijolos.



## Reação à Força Peso

Onde se localiza a reação da força peso? Vimos que no caso da bola colocada sobre o gramado que, ao mesmo tempo, que a Terra exerce força sobre a bola a bola reage exercendo força sobre a Terra. A Terra é puxada para cima pela bola sedo o ponto de aplicação dessa força localizado no centro da Terra.

No par ação e reação

$$\vec{F}_{Terra,corpo} = -\vec{F}_{corpo,Terra}$$

a força que o corpo exerce sobre a Terra está sempre localizada no centro do planeta.

## Forças de Atrito de Escorregamento

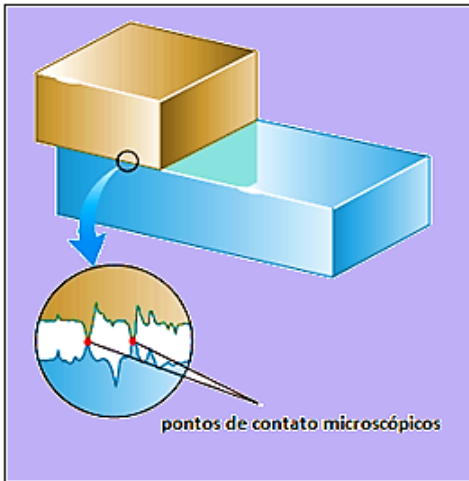


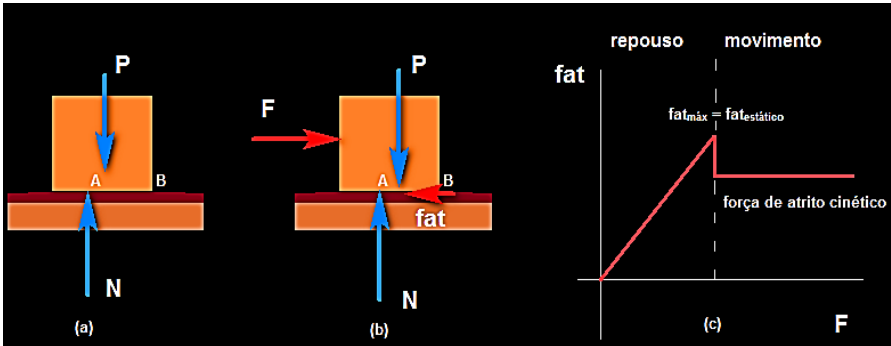
Figura 1. 25 - Duas superfícies estão em contato.

A força de atrito de escorregamento é uma força que aparece quando duas superfícies estão em contato e há uma tendência ao deslizamento relativo entre elas. Ela é decorrente dos contatos microscópicos entre os pontos da superfície que se opõem aos esforços tangenciais que tendem a mover uma superfície sobre a outra. Quando esses contatos microscópicos são quebrados é produzido então o deslizamento relativo das superfícies.

A Figura 1.25 mostra na parta ampliada essas soldas frias dos contatos microscópicos.

Considere a seguinte situação esquematizada na figura seguinte. Na parte (a) um bloco de peso  $\vec{P}$  repousa sobre uma superfície horizontal e a superfície exerce sobre ele a força normal  $\vec{N}$ . Não há nenhuma força tangencial (paralela à superfície) solicitando o bloco a mover-se sobre a superfície. Em (b) uma força  $\vec{F}$  paralela à superfície é aplicada para a direita sobre o bloco e a superfície reage à tendência de deslizamento exercendo sobre o bloco uma força de atrito  $\vec{F}_{at}$  de mesma direção e sentido oposto. Se o bloco não entra em movimento essas forças são iguais em módulo, de modo a produzir uma resultante nula. Em (c) vemos que a intensidade de  $\vec{F}$  é aumentada linearmente e o bloco permanece em repouso até que atinja o valor máximo para a reação do atrito, chamada de força de atrito estático. A

partir daí ocorre o deslizamento do bloco sobre a superfície. A força de atrito é rapidamente então reduzida para o valor  $F_K$  chamado de força de atrito cinético ou força de atrito dinâmico.



**Figura 1. 26 - Ação de forças sobre um bloco em uma superfície horizontal.**

Dessas informações concluímos que:

- (i) se o corpo não é solicitado por nenhuma força externa a força de atrito é nula, pois, não há nada a se opor.
- (ii) Aparecendo uma pequena solicitação externa para o deslizamento, através da força  $\vec{F}$ , aparece uma reação ao deslizamento, através da força de atrito.
- (iii) Aumentando-se a intensidade de  $\vec{F}$  a resistência ao deslizamento aumenta igualmente. Aumenta a força de atrito.
- (iv) Para cada par de superfícies essa força de resistência tem um valor máximo, chamado de força de atrito estático, de modo que:

$$0 \leq F_{at} \leq F_{at,máx} = F_{at,estático}$$

1.17

As características da força de atrito são:

- São forças produzidas entre pares de superfícies em deslizamento ou tendência de deslizamento.
- Dependem das características físicas dessas superfícies através do coeficiente de atrito  $\mu$ .
- Sua intensidade é proporcional à intensidade da força normal.

## Verificação Experimental entre as Intensidades da Força de Atrito e da Força Normal

Podemos construir uma experiência simples de modo a verificar a *proporcionalidade* entre as intensidades das forças de atrito e da força normal. Você poderá utilizar um pequeno bloco, que poderá ser uma caixa de fósforos, uma borracha, o apagador na sala de aula, etc.

Coloque o corpo sobre uma superfície horizontal. Aplicando uma força sobre o bloco de pequena intensidade paralela à superfície, você perceberá que facilmente o corpo entra em movimento. Imprima a mesma força aplicada anteriormente, só que agora, ao mesmo tempo comprima levemente o bloco contra a superfície. Você perceberá que será muito mais difícil mover o bloco, pois o atrito terá aumentado consideravelmente. O fato de você comprimir o bloco contra a superfície produz um aumento da força da superfície sobre o bloco (aumento da força normal). E quanto mais você comprime o bloco contra a superfície maior será a força normal e maior será a dificuldade de mover o bloco, aumentando a força de atrito. Essas forças são proporcionais:

$$F_{at} \sim N \quad 1.18$$

A constante de proporcionalidade entre as forças de atrito e normal é a grandeza adimensional chamada de coeficiente de atrito  $\mu$ . Desta maneira escrevemos:

$$F_{at} = \mu N. \quad 1.19$$

Para cada par de superfícies é definido dois valores do coeficiente de atrito  $\mu$ . Um para o caso em que as superfícies não se deslocam uma sobre a outra, chamado de coeficiente de atrito estático  $\mu_e$  e o outro quando há deslizamento entre as superfícies, chamado de coeficiente de atrito dinâmico (ou cinético)  $\mu_d$ .

De uma forma geral, a experiência mostra que:

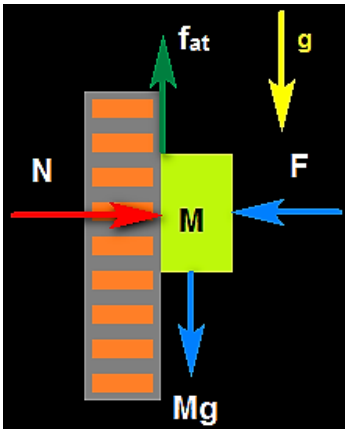
$$\mu_e \geq \mu_d. \quad 1.20$$

Tabela 1.1 - Alguns pares de superfícies em contato e seus respectivos coeficientes de atrito estático e dinâmico.

Coeficientes de Atrito		
Superfícies	$\mu_e$	$\mu_d$
Madeira contra madeira	0,25-0,5	0,2
Vidro contra vidro	0,94	0,2
Aço contra aço	0,74	0,4
Alumínio sobre aço	0,61	0,57
Cobre sobre vidro	0,68	0,47

## Exercício Resolvido

Se a massa  $M$  do bloco vale 2,5 kg e se a força que o comprime contra a parede mede 70 N, pede-se determinar a intensidade da força de atrito necessária para mantê-lo em repouso apoiado contra a parede. Considere a aceleração da gravidade local de módulo  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e  $\mu_e = 0,5$ .



## Solução

A figura ao lado esquerdo mostra o diagrama das forças que atuam sobre o bloco. São elas: a força gravitacional  $Mg$ , a força de atrito  $F_{at}$ , a força  $F$  e a força de reação normal  $N$ . Iniciemos calculando o intervalo de valores da força de atrito, isto é:

$$F_{at,máx} = \mu_e N = \mu_e F = 0,5 \cdot 70$$

$$F_{at,máx} = 35 \text{ N}$$

Assim,  $0 \leq F_{at} \leq 35 \text{ N}$ .

A superfície poderá opor-se ao deslizamento aplicando sobre o bloco uma força de atrito com qualquer valor compreendido nesse intervalo. Como a intensidade da força peso é de:

$$0 \leq F_{at} \leq F_{at,máx} = F_{at, \text{estático}}$$

$$P = Mg = 2,5 \cdot 10 = 25 \text{ N},$$

o atrito aplicará uma força igual em intensidade e em sentido contrário. Portanto,  $F_{at} = 25 \text{ N}$ .

## Força de tração $\vec{T}$

A força de interação entre um fio (cabo ou corda) e um corpo a ele conectado é chamada de força de tração  $\vec{T}$  ou simplesmente tração. O fio precisa estar esticado para exercer a força sobre o corpo, daí o nome de tração, pois, somente quando o fio é tracionado (esticado) é que manifesta essa força. Na Figura 1.27 um operador puxa um fio que está conectado a um carrinho. Ao ser esticado, aparece sobre o fio a força de tração que atuando sobre o carrinho o coloca em movimento

Toda corda ou fio possui um limite de força que pode suportar, sem romper ao ser esticado, chamado de limite de ruptura do fio. Para forças acima do limite de ruptura o fio parte-se, pois, os esforços em seu interior não resistem mais opondo-se à força que o traciona.



Figura 1. 27 - Operador puxa um fio que está conectado a um carrinho.

## Movimento sob a Ação de uma Força Constante

Se a resultante das forças que atua sobre uma partícula é constante ela se moverá, de acordo com a segunda lei de Newton com *aceleração constante*. Neste caso a aceleração média será igual à aceleração instantânea.

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\vec{F}_R}{m}. \quad 1.21$$

A velocidade será facilmente encontrada como função do tempo, pois:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} \quad 1.2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0) \quad 1.23$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}_R}{m}(t - t_0) \quad 1.24$$

A função acima é conhecida como *função horária da velocidade para o movimento com aceleração constante*.

Quando a *direção da velocidade e da aceleração* são as mesmas, podendo ter sentidos diferentes, pode-se mostrar que o movimento da partícula é retilíneo. O movimento que possui essas características é chamado de *Movimento Retilíneo Uniformemente Variado* (M.R.U.V.)

Diremos que o movimento é *acelerado* quando os vetores velocidade e aceleração possuem o mesmo sentido, e dizemos que o movimento é *retardado* quando possuem sentidos opostos.

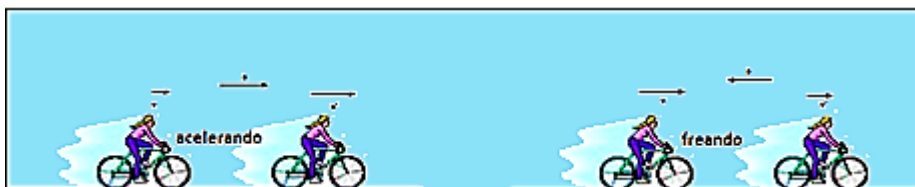


Figura 1. 28 - Representação do movimento acelerado e retardado.

Caso Unidimensional M.R.U.V.

No caso unidimensional a direção do movimento é fixa e um tratamento escalar é suficiente para descrever o movimento. Neste caso escrevemos:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\vec{F}_R}{m} \quad 1.25$$

$$a = a_m = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad 1.26$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad 1.27$$

Em uma dimensão para verificarmos se num dado instante de tempo, o movimento é acelerado ou retardado, basta observarmos os sinais da velocidade e da aceleração: caso os sinais sejam iguais o movimento será acelerado e caso sejam de sinais contrários o movimento é retardado.

Movimento Acelerado	Movimento Retardado
$a > 0 \text{ e } v > 0 \text{ ou } a < 0 \text{ e } v < 0$	$a > 0 \text{ e } v < 0 \text{ ou } a < 0 \text{ e } v > 0$
O módulo da velocidade cresce com o decorrer do tempo.	O módulo da velocidade decresce com o decorrer do tempo.

Lembre-se que:

O sinal da velocidade escalar é positivo se a partícula se move para espaços crescentes, isto é, a favor da trajetória e é negativo quando se movimenta contrário a orientação da trajetória.

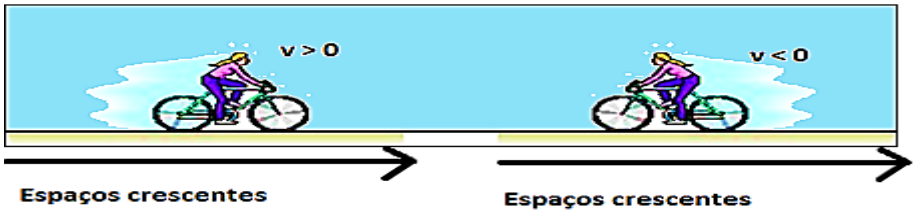


Figura 1. 29 - Orientação quanto ao sinal da velocidade em uma trajetória retilínea.

### Velocidade Média no M.R.U.V.

Em uma dimensão a velocidade escalar média é definida por:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad 1.28$$

onde  $\Delta x$  é o deslocamento escalar. Esta equação é válida independentemente do tipo de movimento descrito pela partícula. Para o M.R.U.V. podemos determinar a velocidade escalar média de uma outra maneira. Vejamos:

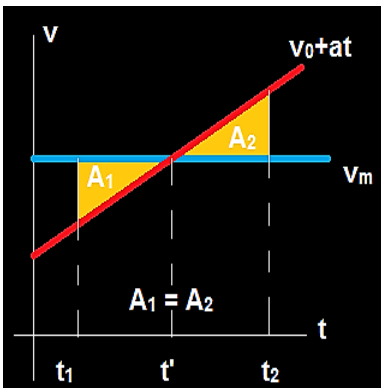


Figura 1. 30 - Gráfico v versus t.

Usando a função

$$v = v_0 + at$$

plotamos o gráfico v versus t.

A velocidade média entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  é tal que, a variação de velocidade entre os instantes  $t_1$  e  $t'$  e entre  $t'$  e  $t_2$  seja a mesma.

$$\begin{aligned} \Delta v(t_1, t') &= \Delta v(t', t_2) \\ v(t') - v(t_1) &= v(t_2) - v(t') \\ 2v(t') &= v(t_2) + v(t_1) \end{aligned}$$

$$v(t') = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2}$$

Portanto:

$$v_m = v(t') = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} \quad 1.29$$

## Deslocamento Escalar no M.R.U.V

Vamos determinar agora o deslocamento escalar  $\Delta x$  de uma partícula que se movimenta em uma dimensão com aceleração constante. Para isto combinemos as duas formas de calcularmos a velocidade escalar média para esse movimento e a função que permite calcular a velocidade escalar  $v$  em função do tempo. Fazemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} \\ \Delta x &= \left[ \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} \right] (t_2 - t_1) \\ \Delta x &= \left[ \frac{v_0 + at_2 + v_0 + at_1}{2} \right] (t_2 - t_1) \\ \Delta x &= \left[ \frac{2v_0 + a(t_2 + t_1)}{2} \right] (t_2 - t_1) \\ x(t_2) - x(t_1) &= \left[ v_0 + \frac{a(t_2 + t_1)}{2} \right] (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Este é o deslocamento escalar entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$  sofrido pela partícula. Fazendo  $t_2 = t$  e  $t_1 = 0$  encontramos:

$$\begin{aligned} x(t) - x(0) &= \left[ v_0 + \frac{a(t + 0)}{2} \right] (t - 0) \\ x(t) - x(0) &= v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned}$$

Aqui  $x(0)$  é a posição ocupada pela partícula quando  $t = 0$ , chamada de posição inicial. Indicaremos isto escrevendo simplesmente  $x(0) = x_0$ . Desta forma, resulta que:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad 1.30$$

é a posição da partícula no instante  $t$ . Esta função é chamada de função horária da posição para o M.R.U.V.

Lembrando que  $a = \frac{F_R}{m}$  escrevemos:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{F_R}{2m} t^2$$

## Equação de Torricelli

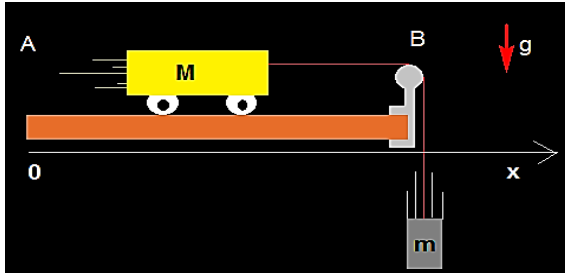
Podemos determinar a velocidade da partícula que executa um M.R.U.V. se conhecemos a sua posição  $x$ . Para isto isolemos  $t$  em  $v(t) = v_0 + at$  e façamos a substituição na equação horária da posição

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad 1.31$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{F_R}{2m} \left( \frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\ x(t) &= x_0 + \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{a (v^2 - 2v v_0 + v_0^2)}{2a^2} \\ x(t) &= x_0 + \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{(v^2 - 2v v_0 + v_0^2)}{2a} \\ x(t) &= x_0 + \frac{2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v v_0 + v_0^2}{2a} \\ x - x_0 &= \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ v^2 &= v_0^2 + 2a (x - x_0) \end{aligned} \quad 1.32$$

## Exercício Resolvido

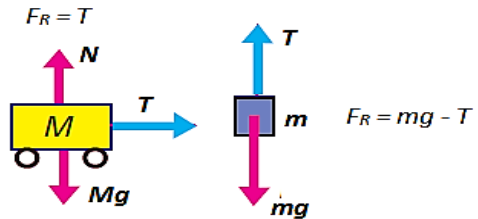
A figura abaixo apresenta um pequeno carrinho de massa  $M$  que pode mover-se sem atrito sobre o plano horizontal. Ele é conectado através de um fio inextensível à um outro corpo de massa  $m$  que está pendurado à borda da mesa. Suponha que no instante mostrado na figura o corpo pendurado é solto obrigando  $M$  a mover-se solidário a ele. Se a distância entre os pontos  $A$  e  $B$  indicados é  $d$ , pede-se: (a) O esquema das forças que atuam em  $M$  e  $m$ ; (b) A aceleração dos carrinhos de massas  $M$  e  $m$ ; (c) O tipo de movimento escrito pelo carrinho de massa  $M$ ; (d) As funções horárias da velocidade e da posição para o carrinho de massa  $M$ ; (e) O instante em que  $M$  irá chocar-se contra o suporte (ponto  $B$ ); (f) sua velocidade nesse instante; (g) a força de tração no fio.



## Solução

(a) Sobre M atuam as forças de tração T (horizontal para a direita), normal N (vertical para cima) e a força peso Mg. Visto que M se move horizontalmente as forças verticais sobre ele se anulam. A resultante sobre M é a tração no fio.

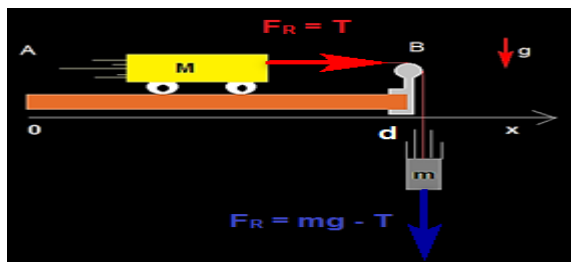
Sobre m atuam as forças tração T (vertical para cima) e peso mg. A resultante das forças sobre m é:



(b) Aplicando a 2ª Lei de Newton a cada um dos corpos encontramos:

Massa M  $F_{RM} = T = Ma$

Massa m  $F_{Rm} = mg - T = ma$



Substituindo o valor de T de uma equação na outra tem-se:

$$mg - Ma = ma$$

$$mg = (m + M)a$$

$$a = \frac{m}{m + M}g$$

(c) De (b) vemos que a aceleração é constante. O movimento do carrinho de massa M é um M.R.U.V.

(d) Considerando  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ , temos:

$$v = \frac{m}{m + M}gt$$

$$x = \frac{mgt^2}{2(m + M)}$$

(e) Ao chocar-se contra o suporte  $x = d$ . Assim,

$$d = \frac{mgt^2}{2(m + M)}$$

$$t = \sqrt{\frac{2d(m + M)}{mg}}$$

(f) Sua velocidade é encontrada substituindo t na função velocidade:

$$v = \frac{m}{m + M}g \sqrt{\frac{2d(m + M)}{mg}}$$

Simplificando, resulta:

$$v = \sqrt{\frac{2dmg}{(m + M)}}$$

(g) A tração no fio é  $T = Ma = \frac{Mm}{m + M}g$

## Movimento Retilíneo e Uniforme M.R.U.

Consideremos o caso no qual a força resultante sobre a partícula seja nula ( $F_R = 0$ ). Desta forma a velocidade da partícula não poderá mudar no tempo, visto que:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 + \frac{F_R}{m}t = v_0. \quad 1.33$$

Isto é, a velocidade para todo instante de tempo  $t$ ,  $v(t)$ , é a mesma que a velocidade no instante  $t = 0$  ( $v_0$ ). O movimento que possui a característica de se processar com velocidade constante no tempo (Força resultante nula) é chamado de Movimento Retilíneo e Uniforme (M. R. U.).

A função horária da posição se reduzirá, neste caso a:

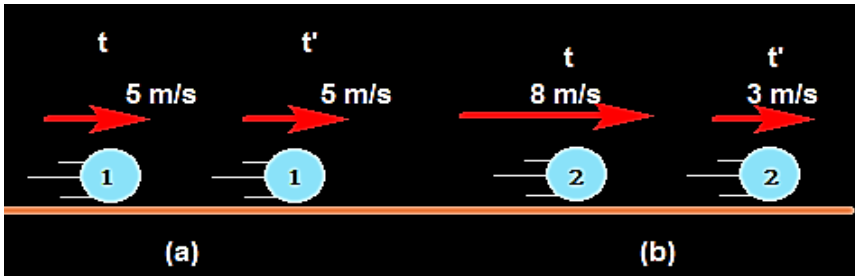
$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad 1.34$$

E o deslocamento da partícula em M.R.U é proporcional ao tempo:

$$\Delta x = x(t) - x_0 = v_0 t. \quad 1.35$$

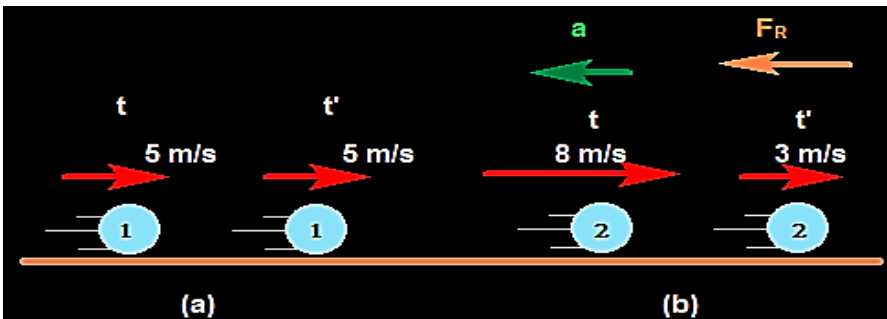
## Exercício Resolvido

As figuras (a) e (b) mostram, respectivamente, os movimentos de duas partículas 1 e 2 em dois instantes de tempo,  $t$  e  $t'$ . Caracterize cada um dos movimentos como uniforme, acelerado ou retardado. Qual a direção e sentido da força resultante, caso exista, em cada caso?



## Solução

Visto que a velocidade da partícula 1 não é alterada entre os instantes  $t$  e  $t'$ , seu movimento não é nem acelerado nem retardado. É uniforme. Não há força resultante sobre ela. As forças atuantes sobre ela são a força normal e a força peso que se anulam.

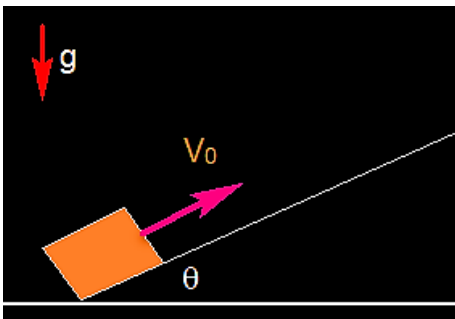


A partícula 2 tem sua velocidade de sentido para a direita e seu valor é reduzido de  $8 \text{ m/s}$  para  $3 \text{ m/s}$ . Sua aceleração é para a esquerda e o movimento é retardado. Existe força resultante sobre a partícula 2 e seu sentido é o mesmo da aceleração. Para a esquerda.

## Exercício Resolvido

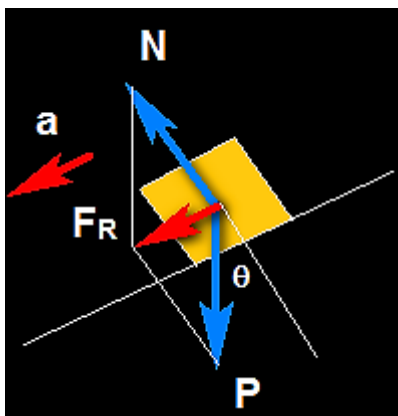
Considere agora que o movimento retilíneo se processa sobre um plano inclinado, como por exemplo um bloco subindo ou descendo uma ladeira de inclinação  $\theta$ . O que as leis de Newton nos informam sobre o tipo de

movimento do bloco? É um M.R.U ou um M.R.U.V.? Na subida é acelerado ou retardado? E na descida? Considere que não há atritos.



### Solução

Começemos desenhando todas as interações mecânicas sofridas pelo bloco. Neste caso o bloco interage com a superfície de contato através da força normal  $\vec{N}$  e com o campo gravitacional  $\vec{g}$  através da força peso  $\vec{P}$ . A resultante das forças é paralela ao plano e de sentido para baixo, que é o mesmo sentido da aceleração. Então, a velocidade na subida é contrária à aceleração. O movimento é retardado e em algum instante e após percorrer uma certa distância o bloco terá instantaneamente velocidade nula. Isto é o que preveem as leis de Newton.

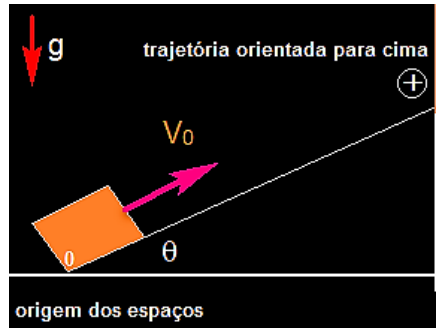


Orientemos a trajetória da partícula para cima com origem dos espaços na base do plano. Neste caso,  $v_0 > 0$  e  $a < 0$ .

Verifiquemos se a aceleração é constante no tempo. Decompondo a força peso em duas componentes, uma paralela ao plano  $P_t$  e outra perpendicular ao plano  $P_n$ , encontramos:

$$\begin{aligned} P_t &= P \sin \theta, \\ P_n &= P \cos \theta. \\ m g \sin \theta &= m a, \\ a &= g \sin \theta. \end{aligned}$$

A aceleração é constante de módulo  $a = g \sin \theta$ .  
O movimento é um M.R.U.V.



## Exercício Resolvido

Tomando como referência o exemplo resolvido anterior calcule: (a) O tempo que o bloco demora para subir o plano inclinado; (b) A distância máxima percorrida pelo bloco enquanto sobe o plano inclinado; (c) A velocidade do bloco quando retorna à base do plano inclinado; (d) O tempo gasto para retornar à base do plano inclinado.

## Solução

(a) Como se trata de um M.R.U.V. de aceleração com módulo  $a = g \sin \theta$ , temos:

$$v = v_0 - g \sin \theta t,$$

onde consideramos  $v_0 > 0$  e  $a < 0$ .

Fazendo  $v = 0$ , encontramos o tempo de subida  $t_s$ :

$$0 = v_0 - g \sin \theta t,$$

$$t_s = \frac{v_0}{g \sin \theta}.$$

(b) A distância  $d$  sobre o plano inclinado vale:

$$d = x - x_0 = v_0 t + \frac{a t^2}{2},$$

$$d = v_0 \frac{v_0}{g \operatorname{sen} \theta} - \frac{g \operatorname{sen} \theta}{2} \left[ \frac{v_0}{g \operatorname{sen} \theta} \right]^2,$$

$$d = \frac{v_0^2}{g \operatorname{sen} \theta} - \frac{v_0^2}{2g \operatorname{sen} \theta} = \frac{v_0^2}{2g \operatorname{sen} \theta}.$$

(c) Vamos usar as equações da velocidade média para resolver este item:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2},$$

onde  $t_1 = t_0$  é o instante do lançamento onde  $v = v_0$  e  $x = 0$  e  $t_2 = t$  é o tempo que retorna ao solo e onde a velocidade procurada é  $v$ . Então:

$$0 = \frac{v + v_0}{2},$$

$$v = -v_0.$$

(d) Basta substituírmos o valor de  $v$  quando retorna à base do plano função horária da velocidade:

$$-v_0 = v_0 - g \operatorname{sen} \theta t,$$

$$-2v_0 = -g \operatorname{sen} \theta t,$$

$$t = 2 \frac{v_0}{g \operatorname{sen} \theta} = 2t_s.$$

Veja que esse resultado é o dobro do tempo para subir o plano.

## Resumo do Capítulo

1. O conjunto de Leis que descrevem o movimento quando as interações são conhecidas são chamadas de Leis do Movimento de Newton.

2. Se o vetor posição  $\vec{r}$ , de uma partícula permanece constante, a partícula está em repouso, e o vetor  $\vec{r}$  varia com o tempo, a partícula está em movimento.

3. O vetor velocidade média de uma partícula é dado por:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

4. O vetor velocidade instantânea é dado por:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

5. A aceleração vetorial média é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

6. A aceleração vetorial instantânea é dada por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

7. O efeito dinâmico das forças enquanto atuam sobre os corpos é produzir mudanças em sua velocidade vetorial, que poderá ser em intensidade, direção e sentido.

8. As três leis do movimento de Newton são:

- Se a força resultante sobre uma partícula é nula, então ela estará em repouso ou em M.R.U.
- A resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto da massa desse corpo pela aceleração adquirida.
- A cada ação corresponde uma reação de igual intensidade e direção, porém sentido contrário.

9. Força normal é a força que a superfície na qual um objeto está apoiado, exerce sobre esse objeto.

10. Forças de atrito são produzidas entre pares de superfície em deslizamento ou tendência de deslizamento, cujo cálculo é dado por:

$$F_{at} = \mu N$$

11. Força de tração é uma força de interação entre um fio (cabo ou corda) e um corpo a ele conectado.

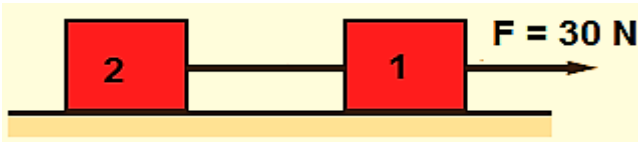
12. Força de empuxo é uma força vertical para cima exercida por um fluido sobre um objeto nele abandonado.

13. As equações para um corpo sob a ação de uma força constante, unidimensional, são:

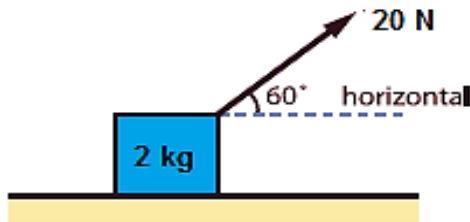
$$v = v_0 + a(t - t_0)$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

## Exercícios do Capítulo 1

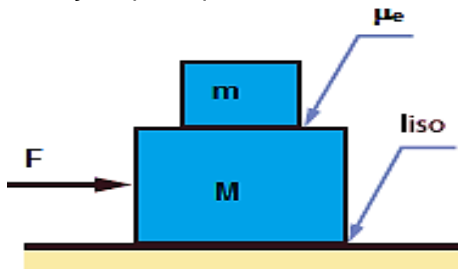
1. Um bloco se move pela ação de uma força constante de  $200\text{ N}$ . Sabendo que a massa do corpo é de  $50\text{ kg}$ , calcular o valor da aceleração. Despreze atritos.
2. Os blocos 1 e 2 da figura têm massas  $m_1 = 3\text{ kg}$  e  $m_2 = 2\text{ kg}$ . Ambos repousam sobre uma superfície sem atrito. A partir de certo instante uma força  $\vec{F}$  de intensidade  $F = 30\text{ N}$  é aplicada como mostra a figura. Pede-se: (a) a aceleração comum dos blocos; (b) a força de tração no fio que liga os blocos; (c) a velocidade  $v$  e o deslocamento  $\Delta x$  dos blocos  $10\text{ s}$  após a força ter sido aplicada.



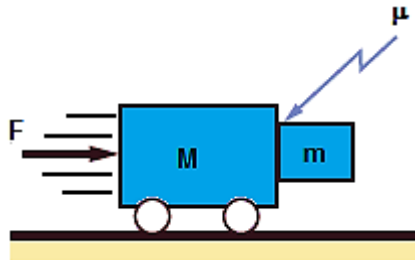
3. Na figura abaixo encontre a aceleração do bloco nos casos (a) não há atrito; (b) o coeficiente de atrito dinâmico vale  $0,2$ . Considere  $g = 10\text{ m/s}^2$ .



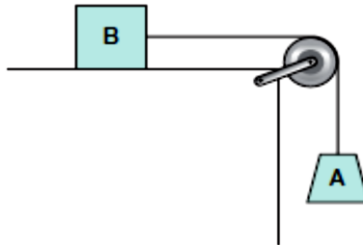
4. Um bloco de massa  $m = 3\text{ kg}$  está colocado sobre outro de massa  $M = 5\text{ kg}$ . Existe atrito entre as superfícies de contato entre os blocos de coeficiente estático  $\mu_e = 0,2$ , porém não há atrito entre  $M$  e o plano de apoio horizontal. Qual o maior valor da força  $F$  para que os blocos se movam juntos?



5. Achar o valor mínimo de  $F$  para que o bloco de massa  $m$  fique em repouso em relação ao carro de massa  $M$ . O coeficiente de atrito entre  $m$  e  $M$  vale  $\mu$ .



6. (MACK-SP) O conjunto abaixo, constituído de fio e polia ideais, é abandonado do repouso no instante  $t = 0$  e a velocidade do corpo  $A$  varia em função do tempo segundo o diagrama dado. Desprezando o atrito e admitindo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a relação entre as massas de  $A$  ( $m_A$ ) e de  $B$  ( $m_B$ ) é:



7. (UFRJ) Um operário usa uma empilhadeira de massa total igual a uma tonelada para levantar verticalmente uma caixa de massa igual a meia tonelada, com uma aceleração inicial de  $0,5 \text{ m/s}^2$ , que se mantém constante durante um curto intervalo de tempo. Use  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e calcule, neste curto intervalo de tempo:

- a força que a empilhadeira exerce sobre a caixa;
  - a força que o chão exerce sobre a empilhadeira.
- (Despreze a massa das partes móveis da empilhadeira)

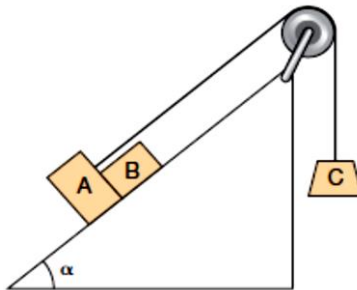


8. (UERJ) Uma balança na portaria de um prédio indica que o peso de Chiquinho é de 600 newtons. A seguir, outra pesagem é feita na mesma balança, no interior de um elevador, que sobe com aceleração de sentido contrário ao da aceleração da gravidade e módulo  $a = g/10$ , em que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Nessa nova situação, qual a indicação o ponteiro da balança?

9. (UFG) Nas academias de ginástica, usa-se um aparelho chamado pressão com pernas (*leg press*), que tem a função de fortalecer a musculatura das pernas. Este aparelho possui uma parte móvel que desliza sobre um plano inclinado, fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. Uma pessoa, usando o aparelho, empurra a parte móvel de massa igual a 100 kg, e a faz mover ao longo do plano, com velocidade constante, como é mostrado na figura.



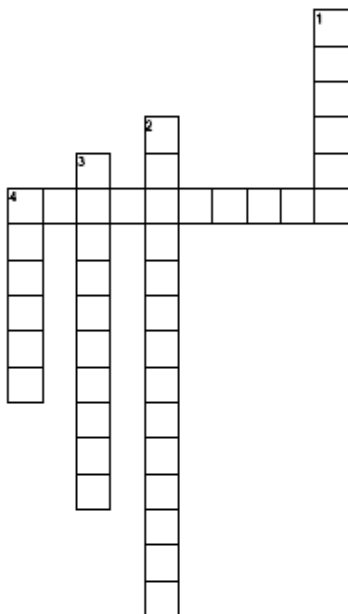
10. (MACK-SP) Num local onde a aceleração gravitacional tem módulo  $10 \text{ m/s}^2$ , dispõe-se o conjunto abaixo, no qual o atrito é desprezível, a polia e o fio são ideais. Nestas condições, pede-se a intensidade da força que o bloco A exerce no bloco B.



Dados	
$m_A = 6,0 \text{ kg}$	$\cos \alpha = 0,8$
$m_B = 4,0 \text{ kg}$	$\text{sen} \alpha = 0,6$
$m_C = 10,0 \text{ kg}$	

Com base em seus conhecimentos sobre a Dinâmica dos Movimentos, preencha as lacunas abaixo:

# Dinâmica dos Movimentos



## Horizontal

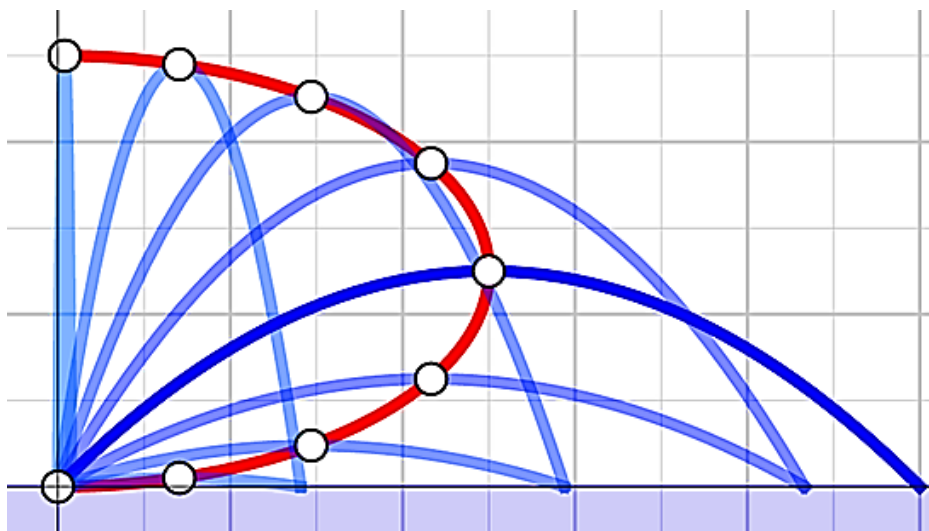
4. Razão entre a variação de velocidade vetorial e o intervalo de tempo necessário.

## Vertical

1. Força que aparece quando um corpo está total ou parcialmente imerso no interior de um fluido.
2. Produz mudança em sua velocidade vetorial, que pode ser em intensidade, direção e sentido.
3. Razão entre o vetor deslocamento sofrido pela partícula e o intervalo de tempo.
4. Força que aparece quando duas superfícies estão em contato e há uma tendência ao deslizamento relativo.

# Cap. 2

## Movimento de Partículas em Campos $\vec{g}$ e $\vec{E}$



Movimento de Partículas.

### Introdução

Neste capítulo estudaremos o efeito dos campos gravitacional e elétrico sobre o movimento de partículas colocadas no seu interior. Sabemos que o campo gravitacional interage com massas e, da mesma forma, partículas carregadas eletricamente no interior do campo elétrico são afetadas por ele. Queremos observar de que maneira as partículas se movem quando afetadas pelo campo, isto é, queremos caracterizar a cada instante  $t$  o estado de movimento das partículas imersas no campo.

Faremos o estudo em casos bastante simplificados que são aqueles decorrentes do movimento em campos gravitacional e elétrico *uniformes*.

Nestes casos, as forças sobre as partículas são constantes, de modo a simplificar bastante o estudo dos movimentos.

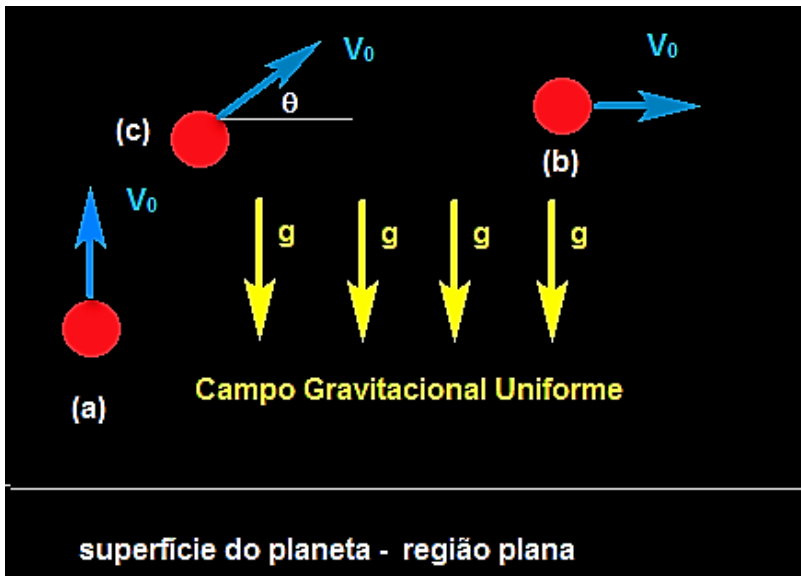
## Lançamentos de Partículas no Interior do Campo $\vec{g}$ Uniforme

Nas proximidades da superfície de um planeta, por exemplo, o nosso planeta Terra, as linhas do campo gravitacional  $\vec{g}$ , são verticais para baixo e igualmente espaçadas. Isto é, o campo  $\vec{g}$  é uniforme nessa região.



Figura 2. 1 - Representação do Campo Gravitacional Uniforme.

Suponha então que, com o intuito de estudarmos o movimento, lançamos partículas de massa  $m$  no interior do campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$ . Chamaremos o lançamento de *lançamento vertical* quando a direção de  $\vec{v}_0$  é paralela à direção de  $\vec{g}$ , de *lançamento horizontal* quando a direção de  $\vec{v}_0$  é perpendicular à direção de  $\vec{g}$  e de *lançamento oblíquo* quando a direção de  $\vec{v}_0$  não é nem paralela nem perpendicular a  $\vec{g}$ . As figuras (a), (b) e (c) representam, respectivamente essas definições.



**Figura 2. 2** - Representação do lançamento vertical (a), lançamento horizontal (b) e lançamento oblíquo (c).

Veremos que o tipo de movimento que a partícula terá depende drasticamente da forma com que a partícula é lançada.

### Lançamento vertical para cima ou para baixo

Como vimos, neste caso, a direção de  $\vec{v}_0$  é a mesma do campo  $\vec{g}$ , sendo de mesmo sentido no *lançamento vertical para baixo* e de sentido oposto no *lançamento vertical para cima*. O movimento da partícula será então retilíneo. Mas, será um M.R.U ou um M.R.U.V.? Apoiemo-nos nas leis de Newton para responder esta pergunta.

Supondo ausência do ar<sup>3</sup>, a única força atuante na partícula de massa  $m$  será a força peso. Ela será a resultante das forças sobre a partícula. Por isso que o movimento será retilíneo, pois, a aceleração produzida por essa força não produzirá mudança na direção de  $\vec{v}_0$ . Somente a intensidade de  $\vec{v}_0$  poderá ser modificada. Diminuindo enquanto a partícula sobe ( $\vec{v}$  e  $\vec{g}$  opostos) e aumentando na descida ( $\vec{v}$  e  $\vec{g}$  de mesmo sentido).

<sup>3</sup> Isto é, movimento no vácuo.



Figura 2.3 - Sentido da velocidade no lançamento vertical.

Além de ser retilíneo será um movimento com aceleração constante, pois:

$$\vec{F}_R = \vec{P}, \quad 3.1$$

$$m\vec{a} = m\vec{g},$$

$$\vec{a} = \vec{g}. \quad 3.2$$

Respondendo à pergunta inicial, o movimento será um M.R.U.V.

Em resumo:

“Quando a *direção da força resultante* sobre a partícula é a mesma de sua velocidade inicial seu efeito será produzir uma mudança na intensidade ou no sentido da velocidade e nunca na sua direção.”

## Orientação da trajetória. Sinal de g

Precisamos orientar a reta onde se processa o movimento, para cima ou para baixo. Essa escolha é arbitrária, mas afetará no sinal da aceleração da gravidade g. Se escolhermos orientar a trajetória para cima o sinal de g será negativo.

Vejam os:

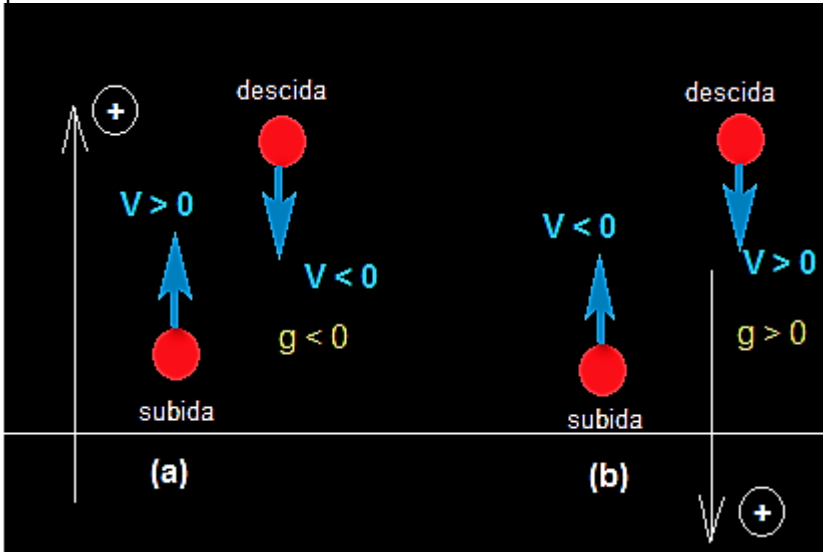
Orientemos a trajetória para cima e observemos o corpo durante a subida e a descida.

Na subida, o movimento será a favor da trajetória ( $v > 0$ ) e retardado ( $g < 0$ ).

Na descida, o movimento será contra da trajetória ( $v < 0$ ) e acelerado ( $g < 0$ ).

Subindo ou descendo teremos  $g < 0$ .

Trajétória orientada para cima implica em  $g < 0$ , independentemente se o corpo sobe ou desce.



**Figura 2. 4** - Trajetória para cima e observemos o corpo durante a subida e a descida.

Se escolhermos orientar a trajetória para baixo o sinal de  $g$  será positivo. Vejamos:

Orientemos a trajetória para baixo e observemos o corpo durante a subida e a descida.

Na subida, o movimento será contra a trajetória ( $v < 0$ ) e retardado ( $g > 0$ ).

Na descida, o movimento será a favor da trajetória ( $v > 0$ ) e acelerado ( $g > 0$ ).

Subindo ou descendo teremos  $g > 0$ .

Trajétória orientada para baixo implica em  $g > 0$ , independentemente se o corpo sobe ou desce.

### Em Resumo:

O sinal de  $g$  depende *exclusivamente* da orientação da trajetória.

## Equações do Movimento

Vamos chamar a posição da partícula de  $y$  e o seu deslocamento por  $\Delta y$  e façamos as trocas  $x \rightarrow y$  e  $a = \pm g$  (dependendo do sentido da trajetória) nas equações do M.R.U.V. para escrevermos as equações para o lançamento vertical para cima ou para baixo.

Função Horária da Velocidade

$$v(t) = v_0 \pm gt \quad 3.3$$

Função Horária da Posição

$$y(t) = y_0 + v_0 t \pm \frac{gt^2}{2} \quad 3.4$$

Equação de torricelli

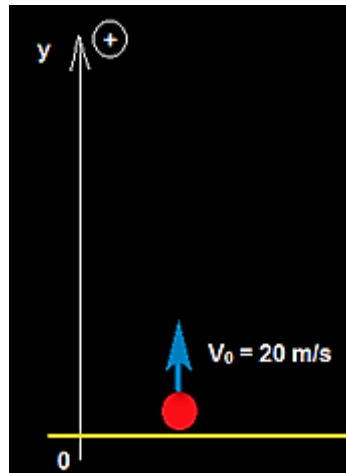
$$v^2 = v_0^2 \pm 2g(y - y_0) \quad 3.5$$

Velocidade Escalar Média

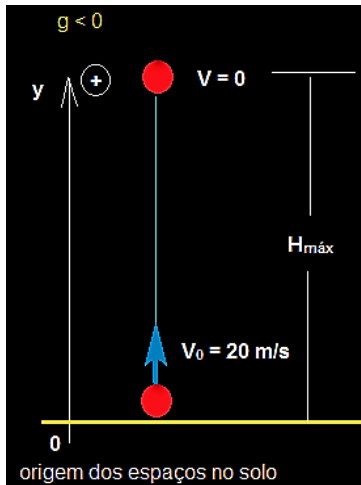
$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} \quad 3.6$$

## Exercício Resolvido

Uma partícula é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo 20 m/s a partir do solo. Considerando o módulo da aceleração da gravidade local igual a 10 m/s<sup>2</sup> e que a resistência do ar é desprezível, determine: (a) O tempo para a partícula atingir a altura máxima (tempo de subida); (b) A altura máxima atingida; (c) A velocidade ao retornar ao solo; (d) O tempo necessário para retornar ao solo



## Solução



(a) Como dissemos antes a escolha da orientação da trajetória é arbitrária. Vamos escolher orientar para cima. Neste caso  $g = -10 \text{ m/s}^2$ . O tempo de subida é encontrado fazendo-se  $v = 0$ '

$$0 = 20 - 10t_s,$$

$$10t_s = 20$$

$$t_s = 2s.$$

(b) Substituindo  $t_s$  na equação da posição  $y$  encontramos a altura máxima:

$$y = y_0 + v_0 t \pm \frac{g}{2} t^2,$$

$$y = H_{\text{máx}} = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20 \text{ m}.$$

(c) Pela equação de Torricelli

$$v^2 = v_0^2 \pm 2g(y - y_0),$$

ao retornar ao solo  $y = y_0$ . Desta forma,  $v^2 = v_0^2$ , cujas soluções são:  $v = v_0$  e  $v = -v_0$ . Como na queda o corpo move-se contra a orientação da trajetória tem-se  $v = -v_0 = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

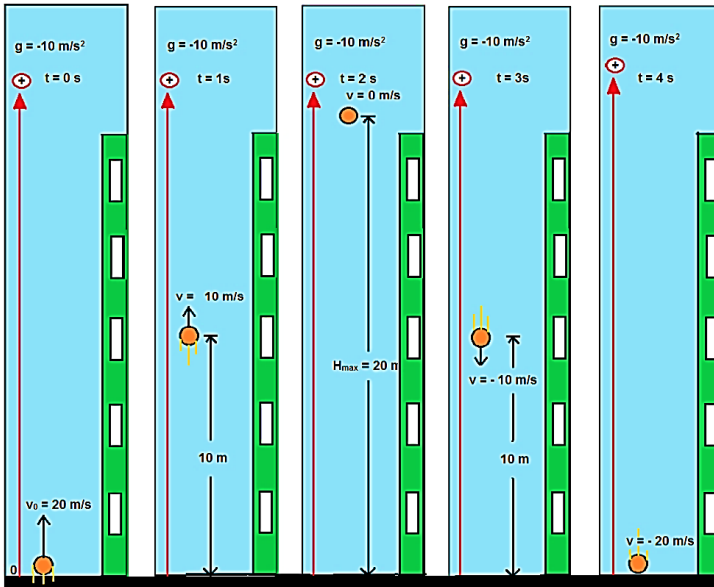
(d) Para encontrar o tempo que retorna ao solo fazemos:

$$-20 = 20 - 10t,$$

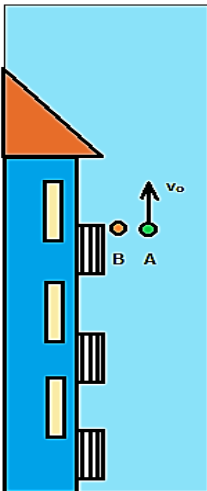
$$-40 = -10t,$$

$$t = 4s.$$

Vemos, portanto, que o tempo de retornar ao solo é duas vezes o tempo de subida.



## Exercício Resolvido



Duas bolas A e B estão a 20 m de altura. A primeira é lançada para cima com velocidade inicial de 10 m/s e a segunda é solta. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$  pede-se a distância entre as bolas no instante em que B chega ao solo.

## Solução

Vamos orientar a trajetória para baixo com origem dos espaços no ponto de lançamento. Neste caso  $g$  será positivo. As funções horárias da posição das partículas são:

$$y_A = 10t - 5t^2 \text{ e } y_B = -5t^2.$$

E as funções velocidades,

$$v_A = 10 - 10t \text{ e } v_B = -10t.$$

Ao chegar ao solo  $y_B = -20 \text{ m}$ . Desta forma,

$$-20 = -5t^2$$

$$t = 2\text{s}.$$

A posição de A nesse instante é:

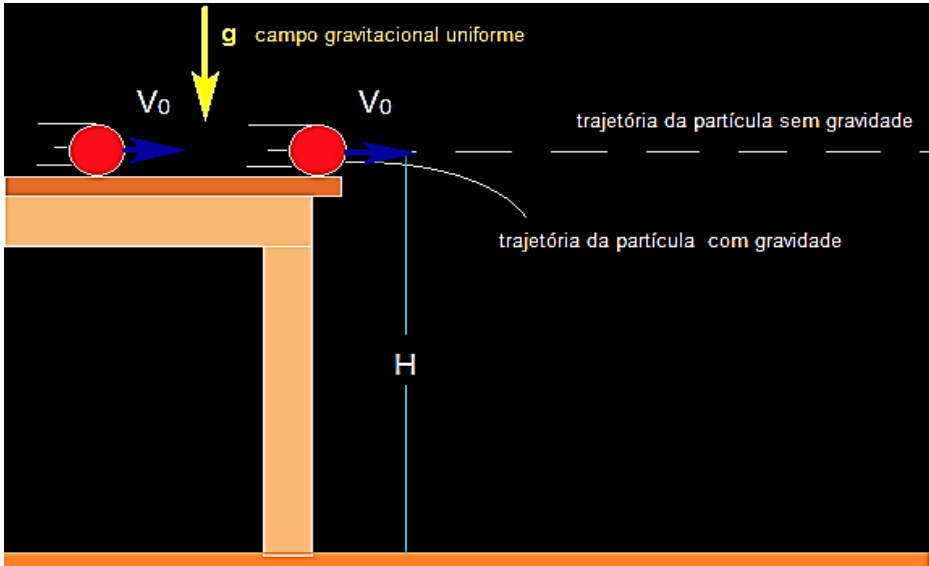
$$y_A = 10 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = 0,$$

Isto é, A retorna ao ponto de lançamento após 2s e B está tocando ao solo. Assim a distância entre eles nesse instante é;

$$d = 20 \text{ m}.$$

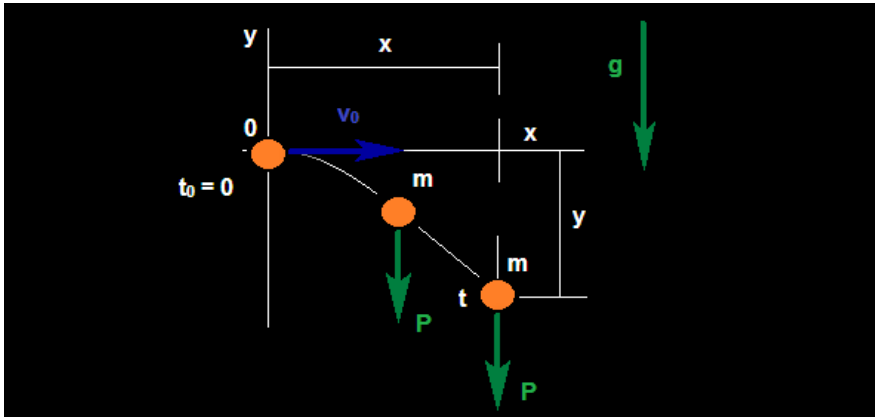
## Lançamento Horizontal

No lançamento horizontal a velocidade de lançamento da partícula é perpendicular à direção de  $\vec{g}$  e o movimento da partícula não será mais retilíneo. Qual será então a curva descrita enquanto a partícula se move? Novamente nos apoiemos nas leis de Newton para responder essa pergunta. Considere que uma partícula de massa  $m$  seja lançada horizontalmente, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , da borda de uma mesa de altura  $H$  (relativamente ao solo) numa região de campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$ , como mostra a Figura 2.5.



**Figura 2. 5** - Partícula de massa  $m$  lançada horizontalmente, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , da borda de uma mesa de altura  $H$  (relativamente ao solo) numa região de campo gravitacional uniforme  $\vec{g}$ .

Se o campo gravitacional  $\vec{g}$  não existisse nenhuma força atuaria sobre a partícula. Sua velocidade não poderia ser alterada e a partícula continuaria a mover-se em linha reta. Isto é o que nos diz as leis de Newton. Existindo gravidade, a força peso atua sobre a partícula puxando-a em direção ao solo, desviando a partícula da trajetória sem gravidade. Pergunta-se: o movimento ainda assim poderá ser retilíneo? Veremos que a resposta é negativa.



**Figura 2. 6** - Força peso atua sobre a partícula puxando-a em direção ao solo, desviando a partícula da trajetória sem gravidade.

Se a partícula é lançada com velocidade  $\vec{v}_0$  no instante  $t_0 = 0$  da origem do sistema de coordenadas cartesianas, no instante  $t$  terá se deslocado uma distância  $x$  para a direita e uma distância  $y$  para baixo devido a atuação da força peso  $\vec{P}$ .

Como na direção  $x$  não há força alguma a velocidade nessa direção não poderá ser alterada permanecendo em qualquer instante  $\vec{v}_0$ . Desta forma o deslocamento em  $x$  será:

$$x = v_0 t, \quad 3.7$$

visto que se trata de um M.R.U.

Na direção  $y$ , existe a aceleração  $a = -g$ , e o deslocamento  $y$  será dado por:

$$y = -\frac{gt^2}{2}, \text{ para } y_0 = 0. \quad 3.8$$

Substituindo o valor  $t = \frac{x}{v_0}$  na equação do deslocamento  $y$ , encontramos:

$$y = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad 3.9$$

que é uma equação de uma parábola.

Concluimos que:

“O movimento da partícula lançada perpendicularmente ao campo gravitacional é um *movimento parabólico*.”

### Interpretação do Movimento Parabólico como dois Movimentos Retilíneos Independentes

Depois de ter sido lançada a gravidade irá produzir na bola uma velocidade vertical  $v_y$  de queda, e ao mesmo tempo que a bola se desloca para a direita também se deslocará para baixo. Em cada instante a velocidade da bola é a soma vetorial de uma velocidade horizontal (que é constante no tempo) e uma velocidade vertical (que varia no tempo):

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y, \quad 3.10$$

cuja intensidade vale:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad 3.11$$

A Figura 2.7 mostra que na direção x vetor velocidade é sempre constante, logo  $v_x = v_o$  sempre. Desta forma interpretamos o movimento parabólico como a soma de dois movimentos *retilíneos* que se processam *simultaneamente* e *independentemente* em direções perpendiculares entre si.

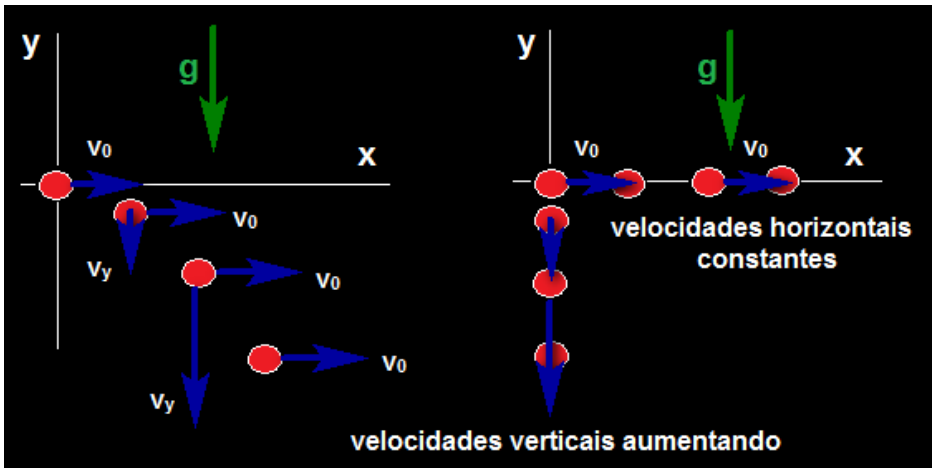


Figura 2. 7 - Movimento parabólico.

Sendo o movimento vertical um M.R.U.V. a componente  $y$  da velocidade é dada por:

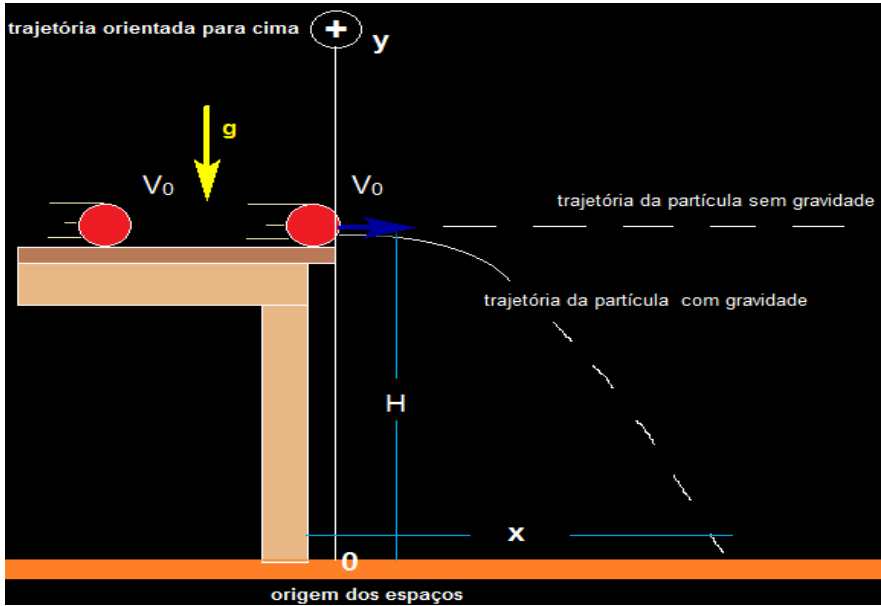
$$v_y = \pm gt. \quad 3.12$$

#### Em Resumo:

- O movimento parabólico pode ser analisado como a soma (superposição) de dois movimentos retilíneos e independentes, um na direção perpendicular à direção do vetor gravidade  $\vec{g}$  e outro paralelo a direção de  $\vec{g}$
- Cada um desses movimentos se processa como se o outro não existisse e a única coisa em comum entre eles é que ocorrem simultaneamente.
- Este é o princípio da independência dos movimentos de Galileu.

#### Exercício Resolvido

Uma bola é lançada horizontalmente da borda de uma mesa que possui altura 1,25 m. A velocidade inicial da bola é de 5 m/s e a aceleração da gravidade local possui módulo igual a 10 m/s<sup>2</sup>. Pede-se determinar: (a) o tempo que a bola chega ao solo; (b) a distância horizontal percorrida desde o lançamento até o momento que alcança o solo; (c) a velocidade da bola no instante que toca o solo.



## Solução

Vamos novamente orientar a trajetória para cima com a origem dos espaços situada no solo. As equações dos movimentos horizontal e vertical são, respectivamente:

$$x = 5t,$$

$$y = 1,25 - 5t^2 \text{ e } v_y = -5t.$$

(a) Ao chegar ao solo  $y = 0$ .

$$0 = 1,25 - 5t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{1,25}{5}} = \sqrt{0,25} = 0,5 \text{ s},$$

é o tempo que chega ao solo.

(b)  $x = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ m}$ .

Poderíamos ter encontrado o mesmo valor através da equação da trajetória:

$$t = \frac{x}{5},$$
$$y = 1,25 - 5 \left(\frac{x}{5}\right)^2 = 1,25 - \frac{x^2}{5}.$$

Fazendo  $y = 0$ , encontramos  $x = \sqrt{5 \cdot 1,25} = \sqrt{6,25} = 2,5 \text{ m}$ .

(c) A velocidade ao encontrar o solo é  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

$$v_y = -5 \cdot 0,5 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ e } v_x = 5,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ constante.}$$

$$v = \sqrt{2,5^2 + 5^2} = \sqrt{31,25} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

## Lançamento Oblíquo

No lançamento oblíquo a velocidade inicial faz um ângulo, chamado de ângulo de lançamento, com a direção horizontal. Como no caso do lançamento horizontal a trajetória descrita pela partícula será parabólica e usaremos a decomposição em dois movimentos como visto anteriormente. Consideremos uma partícula lançada obliquamente num campo gravitacional uniforme.

Seja  $\theta$  o ângulo de lançamento e façamos a decomposição da velocidade inicial em suas componentes horizontal e vertical. Elas estão indicadas na Figura 2.8.

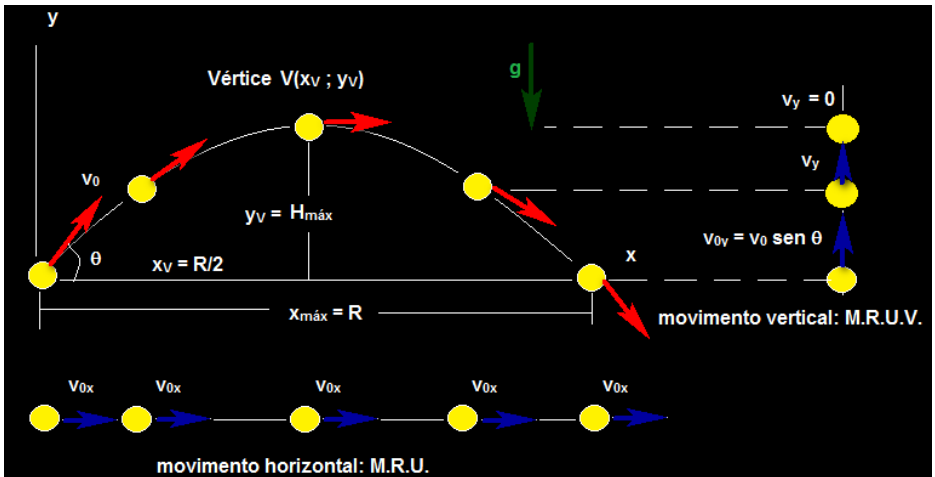


Figura 2. 8 - Partícula lançada obliquamente num campo gravitacional uniforme.

Vamos agora usar a superposição de movimentos retilíneos. O nosso problema original, isto é, o movimento parabólico da partícula é transformado em dois problemas retilíneos: uma partícula se movendo em M.R.U. na direção horizontal e uma outra partícula se movendo em M.R.U.V. na direção vertical. Veja a Figura 2.8.

Em cada instante de tempo  $t$  a velocidade vetorial  $\vec{v}$  da partícula (tangente à trajetória) é dada pela soma vetorial da velocidade do movimento horizontal com a velocidade do movimento vertical:  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ .

### Equações do Movimento Parabólico

#### Movimento Horizontal: M.R.U.

A velocidade é constante  $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ , e a posição é dada pela equação:

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t. \quad 2.13$$

#### Movimento Vertical: M.R.U.V.

#### Função Horária da Velocidade

$$v_y = v_{oy} \pm gt = v_o \operatorname{sen}\theta \pm gt \quad 2.14$$

### Função Horária da Posição

$$y(t) = y_0 + v_{oy}t \pm \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_o \operatorname{sen}\theta t \pm \frac{gt^2}{2}. \quad 2.15$$

### Equação de Torricelli

$$v_y^2 = v_{oy}^2 \pm 2g(y - y_0) = v_o^2 \operatorname{sen}^2\theta \pm 2g(y - y_0). \quad 2.16$$

### Velocidade Escalar Média

$$v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v_y(t_2) + v_y(t_1)}{2} \quad 2.17$$

## Fórmulas da Altura Máxima e do Alcance

Chamamos de altura máxima  $H_{\text{máx}}$  à coordenada  $y$  do vértice da parábola e chamamos de alcance  $R$  a distância horizontal entre o ponto de lançamento da partícula e de aterrissagem da mesma, situados no mesmo nível vertical. Dos nossos estudos em matemática sabemos que a parábola  $y(x) = Ax^2 + Bx + C$ , possui vértice nas coordenadas  $(x_V, y_V)$  dadas por:

$$x_V = \frac{-B}{2A} \text{ e } y_V = \frac{-\Delta}{4A}. \quad 2.18$$

Usaremos estes resultados na determinação da altura máxima e do Alcance. Vamos realizar o mesmo procedimento usado no lançamento horizontal onde determinamos a equação da trajetória parabólica da partícula. Para isto isolemos o tempo  $t$  na equação da horizontal,

$$t = \frac{x}{v_o \cos\theta} \text{ com } x_0 = 0, \quad 2.19$$

e façamos a sus substituição na equação da vertical,

$$y = v_o \operatorname{sen}\theta \left( \frac{x}{v_o \cos\theta} \right) - \frac{g \left( \frac{x}{v_o \cos\theta} \right)^2}{2},$$

$$y(x) = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta} \right) x^2. \quad 2.20$$

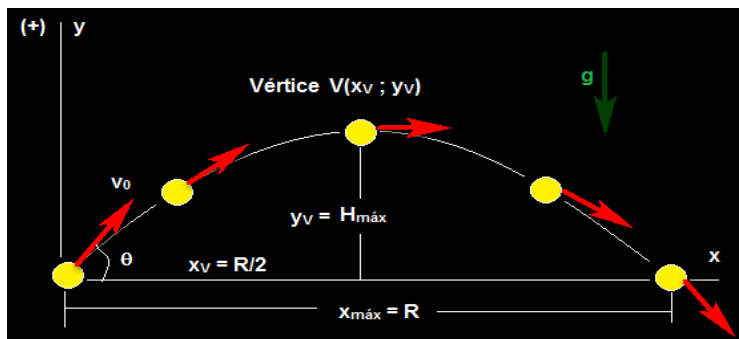
Identificando  $A = \frac{-g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}$ ,  $B = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$  e  $C = 0$ , fazemos o cálculo

$$H_{\text{máx}} = \frac{-\Delta}{4A} = \frac{-B^2}{4A} = \frac{-\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta}}{-4 \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}} = \frac{\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta}}{2 \frac{g}{v_0^2 \text{cos}^2\theta}},$$

$$H_{\text{máx}} = \frac{\frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta}}{2 \frac{g}{v_0^2 \text{cos}^2\theta}} = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen}^2\theta.$$

$$x_V = \frac{-B}{2A} = \frac{-\frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}}{-2 \frac{g}{2v_0^2 \text{cos}^2\theta}} = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}\theta \text{cos}\theta. \quad 2.21$$

Da Figura 2.9 temos que  $R = 2x_V = 2 \frac{v_0^2}{g} \text{sen}\theta \text{cos}\theta$ .



**Figura 2. 9** - Altura máxima  $H_{\text{máx}}$  à coordenada  $y$  do vértice da parábola e chamamos de alcance  $R$  a distância horizontal entre o ponto de lançamento da partícula e de aterrissagem da mesma, situados no mesmo nível vertical.

## Movimento num Campo Elétrico Uniforme

Consideremos agora o caso em que partículas que possuem carga elétrica são lançadas no interior de um campo elétrico uniforme, como aquele

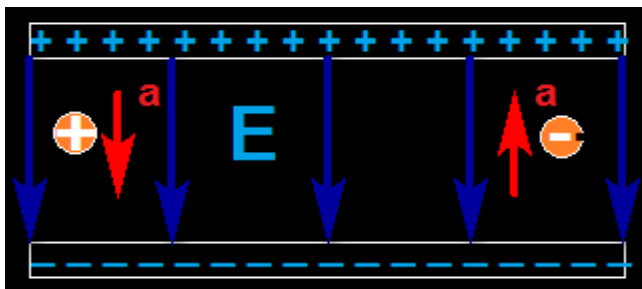
produzido por um capacitor de placas paralelas de grandes dimensões. Se somente o campo elétrico está presente, isto é, se desprezamos os efeitos gravitacionais, o resultado é completamente análogo ao caso do movimento no campo gravitacional. Fazemos simplesmente a troca da aceleração gravitacional  $\vec{g}$  pela aceleração decorrente da ação do campo elétrico  $\vec{E}$ . Lembrem-se que no caso gravitacional fizemos,

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m\vec{g} \therefore \vec{a} = \vec{g}. \quad 2.22$$

Analogamente fazemos:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = q\vec{E} \therefore \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}. \quad 2.23$$

Vemos dessa equação que, diferentemente do caso gravitacional, há dois casos para serem considerados. O primeiro é da carga positiva ( $q > 0$ ) lançada no interior do campo elétrico uniforme, onde a aceleração terá o sentido do campo.

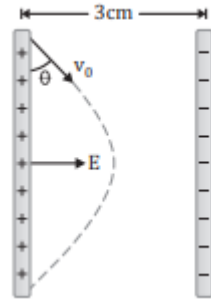


**Figura 2. 10** - Partículas que possuem carga elétrica são lançadas no interior de um campo elétrico uniforme, como aquele produzido por um capacitor de placas paralelas de grandes dimensões.

No segundo a carga negativa ( $q < 0$ ) é lançada e a aceleração terá sentido oposto ao do campo  $\vec{E}$ , independentemente da direção da velocidade de lançamento  $\vec{v}_0$ .

## Exercício Resolvido

Um elétron é lançado com uma velocidade inicial  $v_0 = 5,4 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  e formando  $\theta = 30^\circ$  com respeito a vertical num campo elétrico uniforme de intensidade  $E = 4 \cdot 10^3 \text{ N/C}$  entre as duas placas paralelas separadas por 3 cm. Calcule: (a) A distância máxima com relação a placa positiva que alcança o elétron; (b) Qual a altura com relação a placa positiva que alcança o elétron.



## Solução

a) A distância máxima, será:

$$x_{\text{máx}} = 2 \frac{v_0^2}{g} \text{sen}\theta \text{cos}\theta$$
$$x_{\text{máx}} = 2 \frac{(5,4 \cdot 10^6)^2}{10} \text{sen}30^\circ \cdot \text{cos}30^\circ$$
$$x_{\text{máx}} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

b) Para a altura, temos:

$$H_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen}^2\theta$$
$$H_{\text{máx}} = \frac{(5,4 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 10} \text{sen}^2 30^\circ$$
$$H_{\text{máx}} = 0,4 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

## Resumo do Capítulo

1. São três tipos de lançamento:

- vertical, quando a direção do vetor  $v$  é paralela à direção do vetor  $g$ ;
- horizontal, quando a direção do vetor  $v$  é perpendicular à direção do vetor  $g$ ;
- oblíquo, quando a direção do vetor  $v$  não é paralela nem perpendicular ao vetor  $g$ .

2. No lançamento vertical para cima ou para baixo, o movimento da partícula será M.R.U.V. com  $a = g$ .

3. O sinal de  $g$  depende *exclusivamente* da orientação da trajetória.

4. As equações do movimento são:

$$\text{Função Horária da Velocidade : } v(t) = v_0 \pm gt$$

$$\text{Função Horária da Posição: } y(t) = y_0 + v_0 t \pm \frac{gt^2}{2}$$

$$\text{Equação de Torricelli: } v^2 = v_0^2 \pm 2g(y - y_0)$$

$$\text{Velocidade Escalar Média: } v_m = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2}$$

5. No lançamento horizontal o movimento é perpendicular ao vetor  $g$ . O movimento não é mais retilíneo e deve ser analisado como a soma de dois movimentos simultâneos e independentes, vertical (M.R.U.V) e horizontal (M.R.U.).

6. No lançamento oblíquo o vetor velocidade  $v$ , forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O movimento deve ser analisado separadamente em uma componente vertical e uma horizontal.

7. Na horizontal o movimento é M.R.U. e as equações são:

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta$$

$$x = x_o + v_o \cos \theta t$$

8. Na vertical o movimento é M.R.U.V. e as equações são:

$$\text{Função Horária da Velocidade : } v_y = v_{0y} \pm gt = v_o \text{ sen}\theta \pm gt$$

$$\text{Função Horária da Posição: } y(t) = y_0 + v_{0y}t \pm \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_o \text{ sen}\theta t \pm \frac{gt^2}{2}.$$

$$\text{Equação de Torricell: } v_y^2 = v_{0y}^2 \pm 2g(y - y_0) = v_o^2 \text{ sen}^2\theta \pm 2g(y - y_0).$$

## Exercícios do Capítulo 2

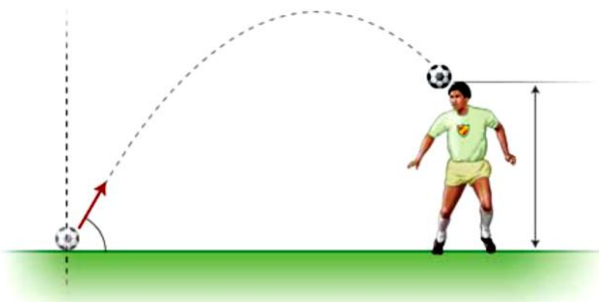
1. (FAFI-BH Adaptado) Um menino lança uma bola verticalmente para cima do nível da rua. Uma pessoa que está numa sacada a 10 m acima do solo apanha essa bola quando está a caminho do chão. Sabendo-se que a velocidade inicial da bola é de 15 m/s, qual a velocidade da bola, ao ser apanhada pela pessoa?



2. (UERJ) Um malabarista consegue manter cinco bolas em movimento, arremessando-as para cima, uma de cada vez, a intervalos de tempo regulares, de modo que todas saem da mão esquerda, alcançam uma mesma altura, igual a 2,5 m, e chegam à mão direita. Desprezando a distância entre as mãos, determine o tempo necessário para uma bola sair de uma das mãos do malabarista e chegar à outra, conforme o descrito acima. (Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .)

3. (CEFET-BA) Um balão em movimento vertical ascendente à velocidade constante de 10 m/s está a 75 m da Terra, quando dele se desprende um objeto. Considerando a aceleração da gravidade igual a  $10 \text{ m/s}^2$  e desprezando a resistência do ar, o tempo, em segundos, em que o objeto chegará a Terra, é:

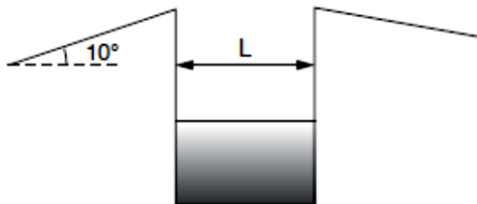
4. Numa partida de futebol, o goleiro bate o tiro de meta e a bola, de massa 0,5 kg, sai do solo com velocidade de módulo igual a 10 m/s, conforme mostra a figura. No ponto  $P$ , a 2 metros do solo, um jogador da defesa adversária cabeceia a bola. Considerando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , determine a velocidade da bola no ponto  $P$ .



5. (UFPE) Dois bocais de mangueiras de jardim, *A* e *B*, estão fixos ao solo. O bocal *A* é perpendicular ao solo e o outro está inclinado  $60^\circ$  em relação à direção de *A*. Correntes de água jorram dos dois bocais com velocidades idênticas. Qual a razão entre as alturas máximas de elevação da água?

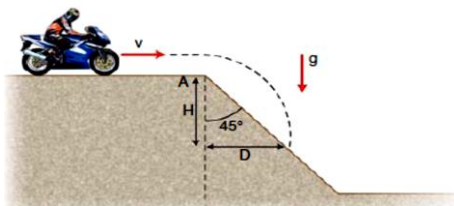
6. (UNITAU-SP) Numa competição de motocicletas, os participantes devem ultrapassar um fosso e, para tornar possível essa tarefa, foi construída uma rampa conforme mostra a figura.

Desprezando as dimensões da moto e considerando  $L = 7,0$  m,  $\cos 10^\circ = 0,98$  e  $\sin 10^\circ = 0,17$ , determine a mínima velocidade com que as motos devem deixar a rampa a fim de que consigam atravessar o fosso. Use  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

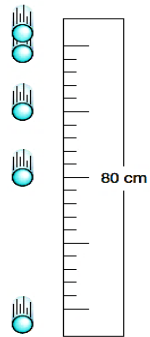


7. (FUVEST-SP) Um motociclista de *motocross* move-se com velocidade  $v = 10$  m/s, sobre uma superfície plana, até atingir uma rampa (em *A*), inclinada  $45^\circ$  com a horizontal, como indicado na figura. A trajetória do motociclista deverá atingir novamente a rampa a uma distância horizontal *D* ( $D = H$ ), do ponto *A*. Pede-se o valor de *D*.

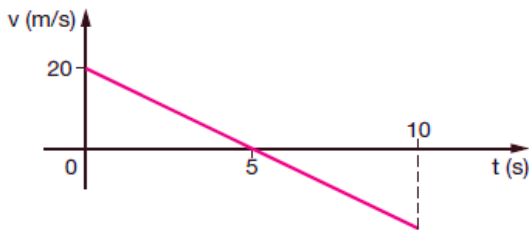
8. (UEPI) Um corpo é abandonado de uma altura de 20 m num local onde a aceleração da gravidade da Terra é dada por  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Desprezando o atrito, o corpo toca o solo com velocidade:



9. (UECE) De um corpo que cai livremente desde o repouso, em um planeta X, foram tomadas fotografias de múltipla exposição à razão de 1200 fotos por minuto. Assim, entre duas posições vizinhas, decorre um intervalo de tempo de  $1/20$  de segundo. A partir das informações constantes da figura, podemos concluir que a aceleração da gravidade no planeta X, expressa em metros por segundo ao quadrado, é:



10. (EFEI-MG) A velocidade de um projétil lançado verticalmente para cima varia de acordo com o gráfico da figura. Determine a altura máxima atingida pelo projétil, considerando que esse lançamento se dá em um local onde o campo gravitacional é diferente do da Terra.



Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas:

# Movimento de Partículas

Em Campos Gravitacional e Elétrico



Horizontal

Equações

Alturamáxima

Trajectoria

Campoelétrico

Alcance

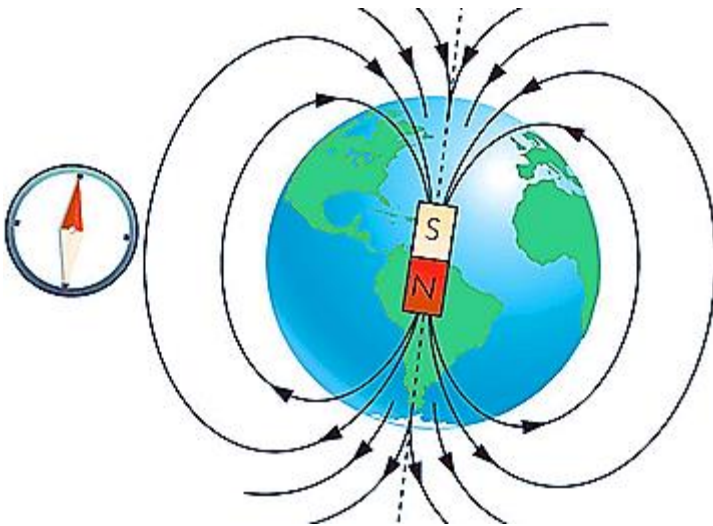
Vertical

Campouniform

Obliquo

# Cap. 3

## Campo Magnético



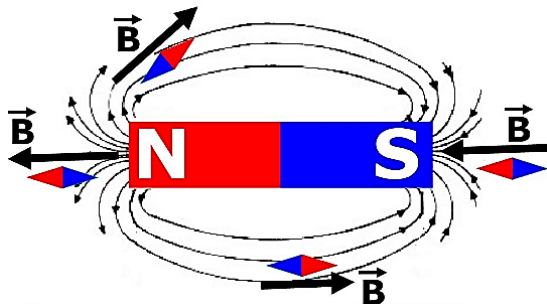
Representação das linhas de indução do campo magnético terrestre.

### Introdução

Vimos até aqui dois campos: o campo gravitacional e o campo elétrico. O campo gravitacional é uma perturbação do espaço provocada pela presença de uma massa  $M$ . O campo elétrico é uma perturbação do espaço provocada pela presença de carga elétrica  $Q$ . O que seria o campo magnético?

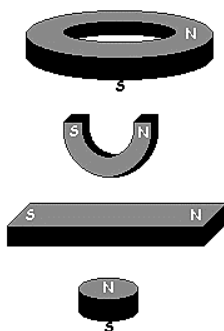
Você já sabe que um ímã é capaz de atrair vários objetos feitos de ferro, cobalto, níquel e algumas ligas. O ímã perturba o espaço à sua volta. Chamamos essa perturbação de **CAMPO MAGNÉTICO**.

O campo magnético também é descrito por um vetor, denominado vetor de indução magnética, e simbolizado por  $\vec{B}$ . Se colocarmos uma agulha magnética nas proximidades de um ímã a DIREÇÃO de  $\vec{B}$  será a mesma da reta  $r$  com a qual a agulha se alinha. O SENTIDO de  $\vec{B}$  é o mesmo para onde aponta o polo norte magnético da agulha. Se colocarmos várias bússolas nas proximidades de um ímã, podemos traçar linhas de um polo a outro do ímã. Essas linhas são denominadas **linhas de indução** do campo magnético do ímã.



**Figura 3. 1** - Agulha magnética nas proximidades de um ímã.

Externamente, as linhas *saem do polo norte e entram no polo sul*. O vetor  $\vec{B}$  tangencia essas linhas e o sentido é o mesmo que elas (do norte para o sul). O que o ímã tem de diferente de uma barra de ferro comum, por exemplo? Se jogarmos limalha de ferro ou vários pequenos pregos de ferro sobre um desses ímãs, veremos que há uma concentração de limalha (ou pregos pequenos) nas extremidades do ímã; essas extremidades são chamadas de polos do ímã. Quando esse ímã pode girar livremente se alinha com a direção norte sul da Terra. A extremidade que aponta para o norte é chamada polo norte do ímã e a extremidade que aponta para o sul é chamada polo sul do ímã. Todo ímã, independente do seu formato, possui dois polos: norte e sul. Veja a Figura 3.2.

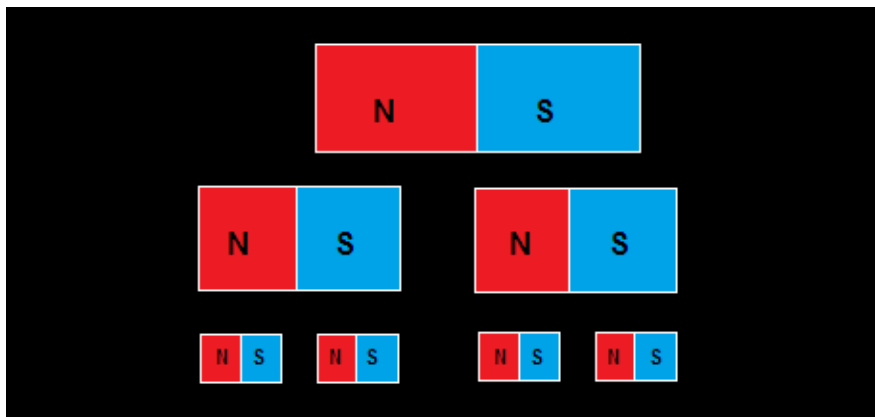


Se o polo norte de um ímã for colocado próximo ao polo norte de outro ímã, surgirá uma força de repulsão entre eles. Caso contrário, se o polo norte de um ímã for colocado próximo ao polo sul de outro ímã, surgirá uma força de atração entre eles. Ou seja, polos de nomes iguais se repelem e polos de nomes diferentes se atraem.

**Figura 3. 2 - Ímãs artificiais.**

### Inseparabilidade dos polos

Se um ímã for quebrado em duas partes, cada uma continuará tendo os dois polos norte e sul. Não se pode obter um único polo isolado. Não foi comprovado até hoje, a existência de monopolo magnético.

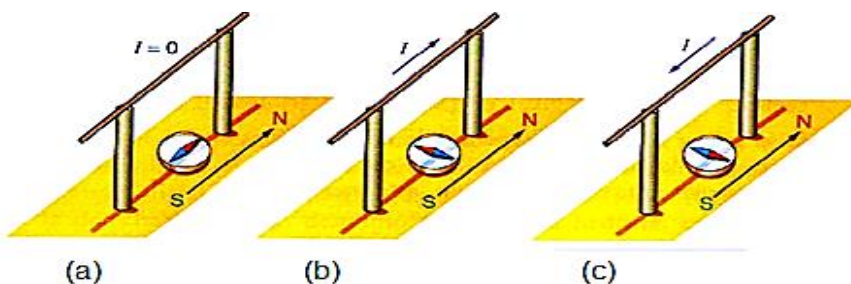


**Figura 3. 3 - Se um ímã for quebrado em duas partes, cada uma continuará tendo os dois polos norte e sul.**

## Campo magnético de correntes

Foi em 1820 que Hans Christian Oersted mostrou experimentalmente que eletricidade e magnetismo não eram fenômenos independentes, sendo duas faces de um campo mais geral, chamado de *campo eletromagnético*. Ele descobriu que uma bússola era afetada por uma corrente elétrica em um fio próximo a ela. A corrente elétrica era capaz de provocar um desvio na agulha magnética da bússola.

A Figura 3.4 mostra a situação. Em (a) nenhuma corrente passa pelo fio ( $I = 0$ ) e a bússola não sofre nenhum desvio, permanecendo paralela ao fio. Em (b) e em (c) uma corrente circula no fio e a agulha da bússola sofre desvio, para um lado e para o outro.



**Figura 3.4** - Em (a) nenhuma corrente passa pelo fio ( $I = 0$ ) e a bússola não sofre nenhum desvio, permanecendo paralela ao fio. Em (b) e em (c) uma corrente circula no fio e a agulha da bússola sofre desvio, para um lado e para o outro.

Em (b) e em (c) uma corrente circula no fio e a agulha da bússola sofre desvio, para um lado e para o outro. Estava comprovado o efeito magnético de correntes:

### Em resumo:

Cargas em movimento (correntes elétricas) também são fontes de campos magnéticos.

## A ação de campos magnéticos sobre cargas elétricas

Considere que em certa região do espaço existe um campo magnético, criado por ímãs naturais ou por correntes elétricas. Ao lançarmos partículas carregadas no interior do campo com certa velocidade inicial  $\vec{v}$  a experiência

mostra os seguintes resultados sobre as interações entre cargas elétricas e campos magnéticos:

### Carga com velocidade inicial $\vec{v} = \vec{0}$ .

A experiência mostra que cargas em repouso em um campo magnético, continuam em repouso. Ou seja, não há manifestação de nenhum tipo de força magnética. Independente do valor da carga e de seu sinal.

Pode-se concluir:

um campo magnético não interage com cargas elétricas em repouso no seu interior.

### Carga lançada com velocidade inicial $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

Quando a partícula carregada é lançada com velocidade  $\vec{v}_0 \neq 0$  uma força aparecerá sobre ela sempre quando a direção de movimento da carga não coincide com a direção do campo magnético. Neste caso a força magnética atuante será:

$$F_m = B \cdot |q| \cdot v \cdot \text{sen}\theta \quad 3.1$$

onde,  $\theta$  é o ângulo entre as direções de  $\vec{v}$  e de  $\vec{B}$ .

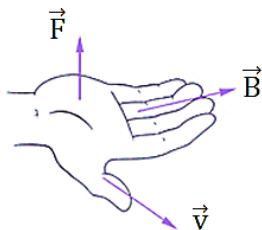
Note que:

Existindo um campo B, a força magnética será nula se, a carga elétrica for nula, a velocidade da partícula for nula (partícula em repouso) ou se o ângulo entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$  for  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , isto é, se a partícula for lançada paralelamente à direção do campo magnético. Pois, neste caso  $\text{sen } 0^\circ = \text{sen } 180^\circ = 0$ .

Quanto a direção, experimentalmente pode-se verificar que a força magnética  $\vec{F}_m$  é perpendicular ao plano formado pelos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ . Para determinarmos o SENTIDO da força magnética usamos uma regra prática denominada *regra da mão direita espalmada*.

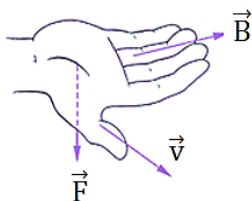
Veja:

- se a carga for positiva com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético. A força magnética será perpendicular à palma da mão, **saindo** dela. Veja a Figura 3.5.



**Figura 3. 5** - Se a carga for positiva com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético,

- se a carga for negativa, o procedimento é o mesmo, com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético. A força magnética será perpendicular à palma da mão, porém, **entrando** nela.



**Figura 3. 6** - Se a carga for negativa, o procedimento é o mesmo, com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético.

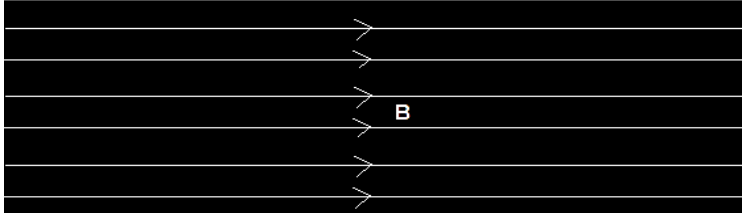
Disso tudo, definimos a intensidade do campo de indução magnética  $B$  no ponto onde a partícula situa-se instantaneamente como:

$$B = \frac{F_m}{v \cdot |q| \cdot \text{sen}\theta} \quad 3.2$$

a unidade de medida  $\frac{N}{m \cdot C}$  é denominada **tesla\*** (T).

## Exercício Resolvido

(Uneb-BA) Uma partícula eletrizada com carga elétrica  $q = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$  é lançada com velocidade  $v = 5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$  em uma região onde existe um campo magnético uniforme de intensidade  $8 \text{ T}$ . Sabendo-se que o ângulo entre a velocidade e o campo magnético é de  $30^\circ$ , pode-se afirmar que a



intensidade, em newtons (N), da força magnética sofrida pela partícula é:

- a) 0,2
- b) 0,4
- c) 0,6
- d) 0,8
- e) 0,4

## Solução

O campo magnético em um ponto próximo a um condutor percorrido por corrente é dado por:

$$F_m = B \cdot |q| \cdot v \cdot \sin\theta \rightarrow F_m = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ$$
$$F_m = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow F_m = 0,4 \text{ N}$$

Alternativa B

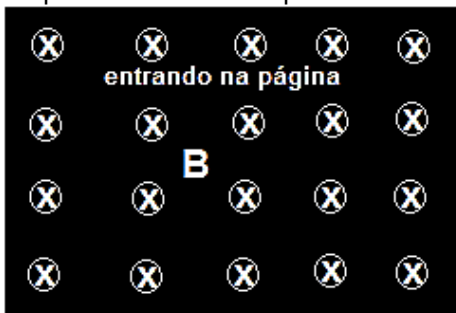
## Campo magnético uniforme

No campo magnético uniforme, o vetor de indução magnética  $\vec{B}$  tem o mesmo módulo, mesma direção e o mesmo sentido em todos os pontos numa dada região. As linhas de indução magnética de um campo uniforme são representadas por linhas retas igualmente espaçadas e paralelas entre si. Veja as Figura 3.7 e 3.8.

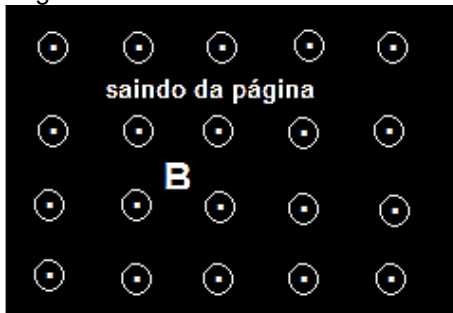
Usaremos as seguintes convenções para indicarmos que o campo está entrando ou saindo da página:

*campo entrando*  $\otimes$       *campo saindo*  $\odot$

Desta forma um campo uniforme entrando e saindo da página, respectivamente são representados da seguinte maneira:



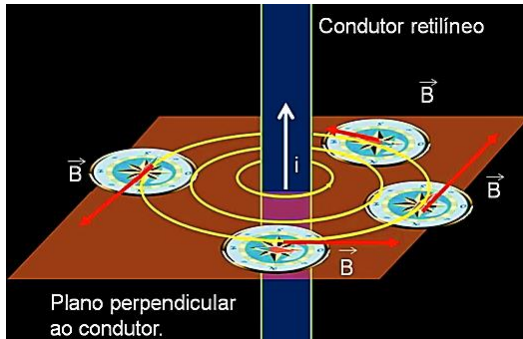
**Figura 3. 7** - Convenção para o campo saindo da página e campo entrando na página.



**Figura 3. 8** - As linhas de indução magnética de um campo uniforme.

## Campo de um fio longo

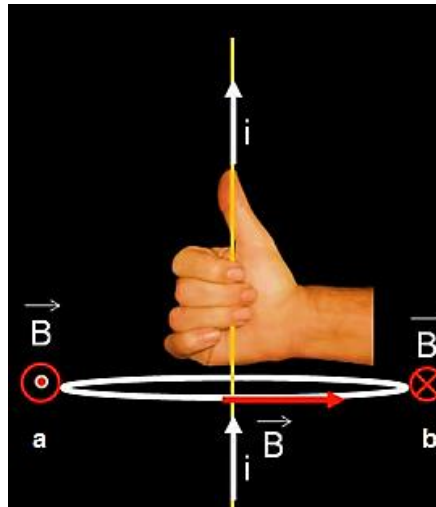
Considere uma placa horizontal plana com um pequeno furo e um fio retilíneo passando por esse furo, perpendicular ao plano da placa, como mostra a figura. Coloquemos sobre a placa várias bússolas e façamos ao passar uma corrente elétrica  $i$  pelo fio. A experiência mostra que as bússolas se orientarão, mostrando a direção e sentido das linhas de indução do campo magnético. Essas linhas são circunferências concêntricas, dispostas no plano da placa, perpendicular ao fio com centro no próprio fio com  $\vec{B}$  tangente à curva em cada ponto



**Figura 3. 9** - Placa horizontal plana com um pequeno furo e um fio retilíneo passando por esse furo, perpendicular ao plano da placa.

Existe uma regra prática para descobrir a orientação das linhas de indução chamada **regra da mão direita**: imagine-se segurando o fio com a mão direita de tal modo que seu dedo polegar aponte no sentido da corrente  $i$ . Girando os quatro outros dedos eles informarão o sentido das linhas de indução naquele ponto.

Por exemplo, no ponto (a) da figura  $\vec{B}$  aponta para fora da página  $\odot$  e no ponto (b) o campo aponta para dentro da página  $\otimes$ .



**Figura 3. 10** - Regra prática para descobrir a orientação das linhas de indução chamada regra da mão direita.

Se a corrente no fio circula em sentido contrário, as linhas do campo  $\vec{B}$  terão sentido contrário ao anteriormente descrito.

A intensidade do vetor  $\vec{B}$  criado por um fio reto e longo é determinada pela Lei de Ampere (que será estudada mais detalhadamente posteriormente). Fazendo uso dessa lei podemos estabelecer que:

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot r} \quad 3.3$$

onde  $r$  é a distância do fio ao ponto onde se quer calcular o campo,  $i$  é a intensidade da corrente elétrica estabelecida no fio, e  $\mu$  é uma constante chamada de **permeabilidade absoluta** do meio.

Observe que para pontos mais distantes do fio a circunferência terá um raio  $r$  maior e, conseqüentemente a intensidade do campo será mais fraca.

Se o meio onde está o fio for o vácuo usamos  $\mu_0$ , permeabilidade absoluta do vácuo, no lugar de  $\mu$ . Na verdade os valores de  $\mu$  no ar, na água por exemplo, é praticamente o mesmo que o valor no vácuo:

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A \quad 3.4$$

#### Em resumo:

O campo magnético criado por um fio reto longo têm as seguintes características,

São circunferências concêntricas com centro sobre o fio

Sua direção e sentido são dados pela regra da mão direita

Sua intensidade é dada por  $B = \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot r}$ .

#### Exercício Resolvido

(FEI-SP) Um fio de cobre, reto e extenso, é percorrido por uma corrente  $i = 1,5$  A. Qual é a intensidade do vetor campo magnético originado em um ponto à distância  $r = 0,25$  m do fio? Dado  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$ .

- a)  $B = 10^{-6}$  T
- b)  $B = 0,6 \cdot 10^{-6}$  T
- c)  $B = 1,2 \cdot 10^{-6}$  T
- d)  $B = 2,4 \cdot 10^{-6}$  T
- e)  $B = 3,0 \cdot 10^{-6}$  T

## Solução

O campo magnético em um ponto próximo a um condutor percorrido por corrente é dado por:

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Substituindo pelos valores numéricos fornecidos, temos:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,5}{2 \cdot \pi \cdot 0,25} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

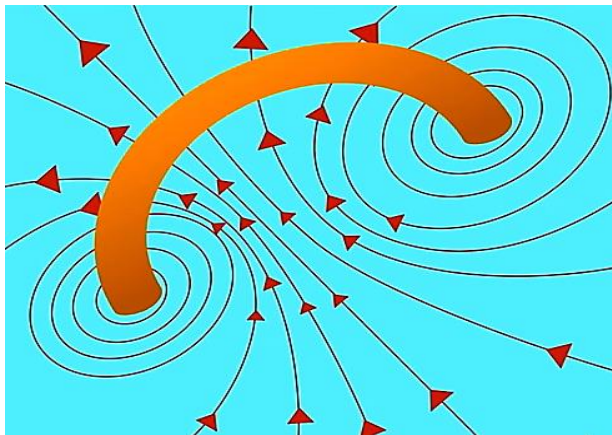
Alternativa C.

## Campo de uma espira circular

Considere agora uma espira circular, na qual circula uma corrente elétrica de intensidade  $i$ . Usando a regra da mão direita em cada ponto ao longo da espira podemos perceber que o sentido das linhas de indução no centro da espira é sempre perpendicular ao plano da espira.



**Figura 3. 11** - Espira circular, na qual circula uma corrente elétrica de intensidade  $i$ .



**Figura 3. 12** - O sentido das linhas de indução no centro da espira é sempre perpendicular ao plano da espira.

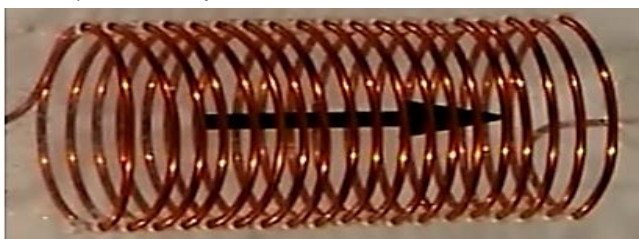
A lei que nos permite calcular a intensidade do vetor  $\vec{B}$  no centro da espira é conhecida como Lei de Biot-Savart. Fazendo uso dessa lei podemos estabelecer que no centro da espira:

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2R'} \quad 3.5$$

onde R é o raio da espira.

## Campo de um solenoide

Um solenoide nada mais é do que um fio condutor enrolado em forma de hélice cilíndrica, (como a espiral de um caderno ou uma mola comum).



**Figura 3. 13** - Solenoide

Fazendo uma corrente elétrica passar por um solenoide, e usando a regra da mão direita, percebemos que o sentido das linhas de indução, não muito

próximos do fio, são linhas retas igualmente espaçadas. Ou seja, nessa região, no interior do solenoide, o campo magnético é praticamente uniforme.

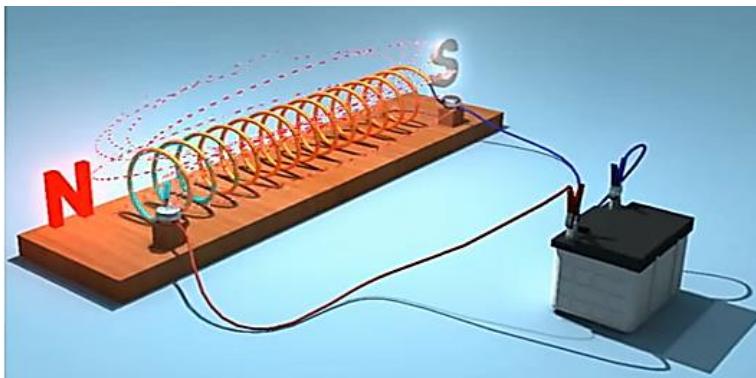


Figura 3. 14 - Corrente elétrica passando por um solenoide.

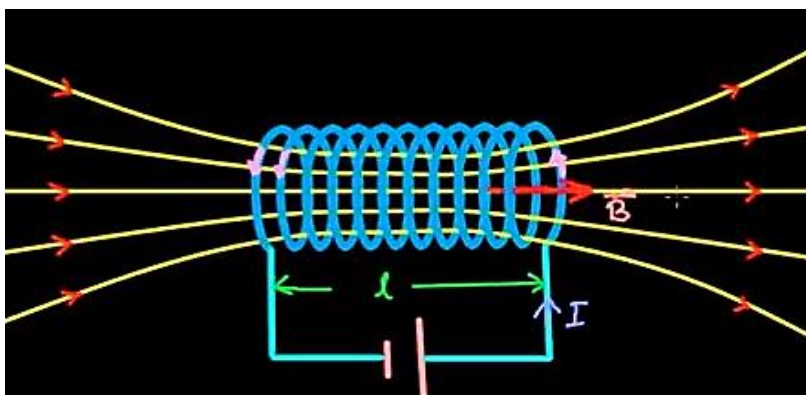


Figura 3. 15 - Linhas de indução no solenoide.

Usando de forma conveniente a Lei da Ampere, podemos calcular a intensidade do campo magnético no interior de um solenoide pela expressão:

$$B = \mu \cdot i \cdot \frac{n}{l}, \quad 3.6$$

onde  $n$  é o número de espiras e  $l$  é o comprimento do solenoide. Podemos resumir todas essas informações dizendo:

### Exercício Resolvido

(UEL-PR-Adaptada) Considere que, no Equador, o campo magnético da Terra é horizontal, aponta para o norte e tem intensidade  $1,0 \times 10^{-4} \text{ T}$ . Lá, uma linha de transmissão transporta corrente de 500 A de oeste para oeste. Qual o módulo, em newtons, da força que o campo magnético da Terra exerce em 200 m da linha de transmissão?

### Solução

$$F_m = B \cdot i \cdot l \cdot \sin \theta$$
$$\theta = 90^\circ$$
$$F_m = 1,0 \cdot 10^{-4} \cdot 500 \cdot 200 \rightarrow F_m = 10 \text{ N}$$

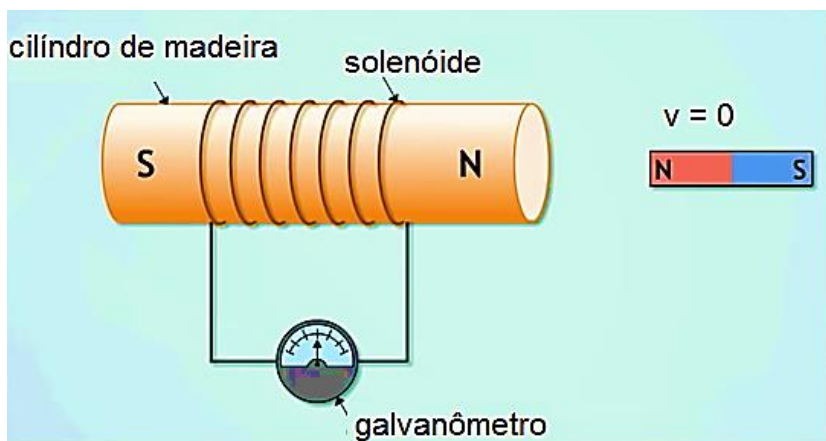
### Lei da Indução de Faraday

Vimos que uma corrente elétrica que percorre um material gera ao seu redor um campo magnético. Será possível inverter o processo e imaginar que campos magnéticos podem criar correntes elétricas? Para responder essa pergunta vamos apresentar um importante resultado, chamado de *Lei da indução de Faraday*, a saber:

### Campos magnéticos produzem correntes elétricas

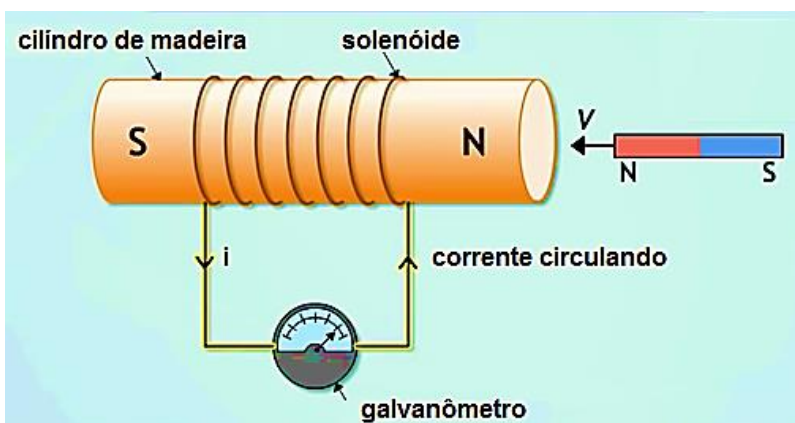
Considere a seguinte experiência: sobre um cilindro de madeira enrolamos um fio formando um solenoide. Este é conectado a um aparelho que mede corrente elétrica chamado de galvanômetro. Próximo desse sistema existe um ímã em formato de barra em repouso com seu polo norte apontando para o solenoide. Nenhuma corrente aparece no solenoide, embora já exista no espaço onde está o solenoide campo magnético criado pelo ímã. Contudo, se movemos o ímã ou o solenoide se aproximando ou se afastando um do outro, algo extraordinário acontece: uma corrente elétrica aparece no galvanômetro.

A Figura 3.16 mostra o ímã parado ( $\vec{v} = \vec{0}$ ) próximo de um solenoide. Porém não é possível ver passagem de corrente elétrica.



**Figura 3. 16** – O galvanômetro mostra nenhuma corrente no circuito.

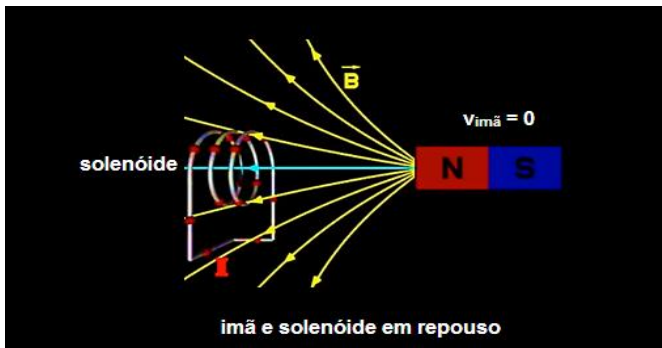
Na Figura 3.17 podemos ver que quando o ímã se aproxima do solenoide com velocidade  $\vec{v}$  uma corrente é induzida no circuito constituído pelo solenoide e pelo galvanômetro.



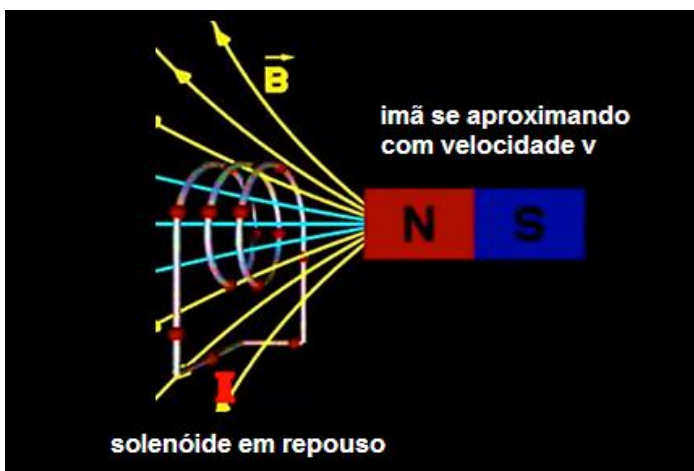
**Figura 3. 17** - Ímã se aproxima do solenoide com velocidade  $\vec{v}$  uma corrente é induzida no circuito constituído pelo solenoide e pelo galvanômetro.

Se continuarmos movendo o ímã ora se aproximando ora se afastando do solenoide, isto é, um movimento de vai e vem a agulha do galvanômetro se defletirá de um lado e de outro, mostrando a passagem de corrente

A Figura 3.18 mostra as desenhamos as linhas do campo  $\vec{B}$  geradas pelo ímã de barra que, como sabemos, nascem no polo norte e morrem no polo sul.



**Figura 3. 18** - As linhas do campo  $\vec{B}$  geradas pelo ímã de barra que, como sabemos, nascem no polo norte e morrem no polo sul.



**Figura 3. 19** - Ímã se aproxima do solenóide com velocidade  $\vec{v}$  um maior número de linhas do campo atravessará a área da seção transversal do solenóide.

Se fazemos o ímã se aproximar do solenóide com velocidade  $\vec{v}$  um maior número de linhas do campo atravessará a área da seção transversal do solenóide. Fazendo o movimento do ímã em relação ao solenóide de vai e vem, ou do solenóide em relação ao ímã, fazemos variar no tempo o número de linhas do campo que atravessam a área, ora aumentando e ora

diminuindo. É essa variação do número de linhas do campo que atravessam a área que produz corrente no circuito.

Levando novamente o ímã ao estado de repouso o efeito desaparece, pois, o número de linhas que atravessa a área é constante no tempo.

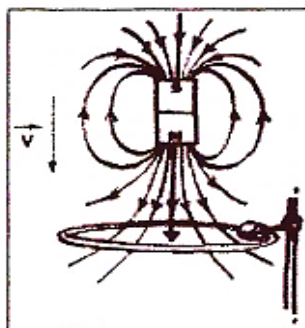
Podemos enunciar a *Lei da Indução de Faraday* dizendo:

“Se o número de linhas do campo de indução magnética  $\vec{B}$  que atravessam uma área de um circuito fechado varia no tempo uma corrente induzida (pelo campo) aparecerá como resposta a essa variação.”

## Exercício Resolvido

(UFRJ) Um ímã permanente cai por ação da gravidade através de uma espira condutora circular fixa, mantida na posição horizontal, como mostra a figura ao lado. O polo norte do ímã está dirigido para baixo e a trajetória do ímã é vertical e passa pelo centro da espira. Use a lei de Faraday e mostre, por meio de diagramas:

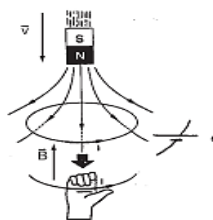
- o sentido da corrente induzida na espira no momento ilustrado na figura
- a direção e o sentido da força resultante exercida sobre o ímã. Justifique suas respostas.



## Solução

a) A corrente induzida tem o sentido anti-horário na espira.

b) Como estamos aproximando um polo norte da espira, nela origina-se um polo norte. Como pólos iguais se repelem, a força magnética sobre o ímã é vertical e para cima. Portanto, a força resultante é vertical para baixo e tem o módulo menor do que o peso do ímã ( $P - F_m$ ).



## Resumo do Capítulo

1. Campos magnéticos são criados por ímãs naturais ou por correntes elétricas.
2. Uma carga  $q$  lançada com velocidade  $\vec{v}$  dentro de uma região de campo magnético  $\vec{B}$  sofre uma força cuja intensidade é dada por:

$$F_m = B \cdot |q| \cdot v \cdot \text{sen}\theta$$

- Depende do ângulo  $\theta$  entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .
- Sua direção é perpendicular ao plano formado por  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .

3. O campo magnético é sempre dipolar, pois, não há maneira de separar seus polos norte e sul.
4. Um fio reto percorrido por uma corrente  $i$  produz ao seu redor um campo de indução circular com centro no fio cuja intensidade é dada por:

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

5. Campo magnético de uma espira circular de raio  $R$  percorrida por uma corrente  $i$ :

$$B = \frac{\mu \cdot i}{2 \cdot R}$$

6. Campo magnético de um solenoide:

$$B = \mu \cdot i \cdot \frac{n}{l}$$

7. Lei da Indução de Faraday: **“Se o número de linhas do campo de indução magnética  $\vec{B}$  que atravessam uma área de um circuito fechado varia no tempo uma corrente induzida (pelo campo) aparecerá como resposta a essa variação.”**

## Exercícios do Capítulo 3

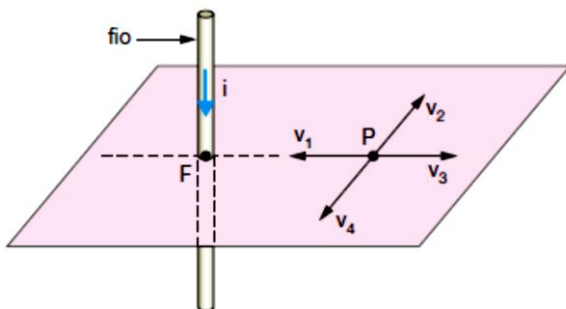
1. (UMESP-SP) Serrando transversalmente um ímã em forma de barra, o que acontece?

- a) As duas partes se desmagnetizam.
- b) Obtém-se um polo norte e um polo sul isolados.
- c) Na secção de corte, surgem polos contrários àqueles das extremidades das partes.
- d) O polo norte conserva-se isolado, mas o polo sul desaparece.
- e) O polo sul conserva-se isolado, mas o polo norte desaparece.

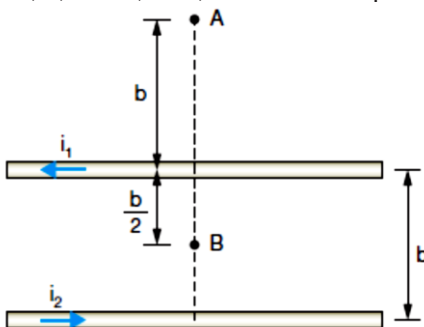
2. (UEL) O esquema representa os vetores  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  e  $v_4$  no plano horizontal. Pelo ponto  $F$  passa um fio condutor retilíneo bem longo e vertical. Uma corrente elétrica  $I$  percorre esse fio no sentido de cima para baixo e gera um campo magnético no ponto  $P$ . O campo magnético gerado no ponto  $P$  pode ser representado:

a) por um vetor cuja direção é paralela ao fio condutor

- b) pelo vetor  $v_4$
- c) pelo vetor  $v_3$
- d) pelo vetor  $v_2$
- e) pelo vetor  $v_1$



3. (EFEI-MG) Dois fios condutores, dispostos paralelamente, estão separados um do outro pela distância  $b = 10,0$  cm. Por eles passam as correntes  $I_1$  e  $I_2$  que valem, respectivamente, 0,50 e 1,00 A, em sentidos opostos, conforme a figura.



4. (ESAM-RN) Um estudante possui dois objetos semelhantes, sendo que um deles é um ímã permanente e o outro é constituído de material não-ímantável. Desejando descobrir qual é o ímã, pensou em proceder de três maneiras:

I. Pendurar os dois objetos por fios e verificar qual deles assume a direção norte-sul.

II. Aproximar os dois objetos e verificar qual deles atrai o outro.

III. Aproximar os dois objetos e verificar qual deles repele o outro.

O estudante poderá determinar qual dos dois objetos é um ímã permanente com os métodos:

a) somente com I e II

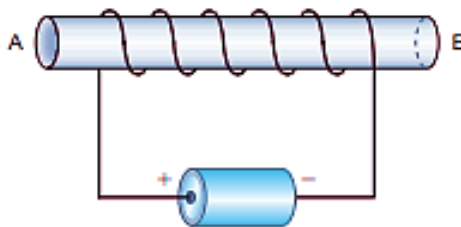
b) somente com I e III

c) somente com III

d) somente com II

e) somente com I

5. (UFG) Um fio fino, encapado ou esmaltado, é enrolado em uma haste de ferro. O fio é ligado aos pólos de uma pilha, como mostrado na figura.

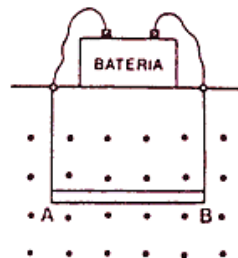


a) Por que a haste passa a atrair pequenos objetos de ferro ou aço (alfinetes, cliques, pequenos pregos etc.)?

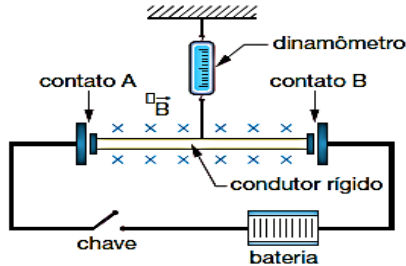
b) Aproximando-se uma bússola dessa haste, qual extremidade ela indicará, como sendo o polo norte?

c) qual a mudança que ocorre ao se inverter a pilha (inverter os polos)?

6. (URRN) Na figura, tem-se uma barra condutora AB, de peso igual a 10 N e comprimento  $l = 1\text{ m}$ , disposta horizontalmente e suspensa por dois fios condutores na região do campo de indução magnética uniforme de intensidade igual a 2,0 T. A intensidade e o sentido da corrente elétrica que deve passar pela barra, para que os fios não fiquem tracionados são, respectivamente:

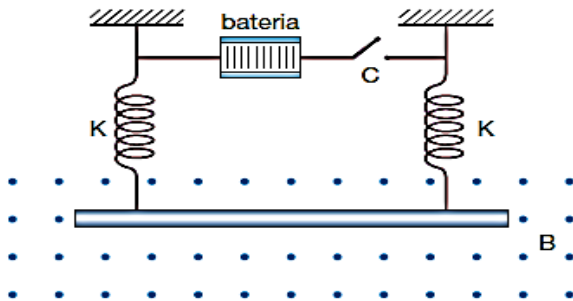


7. (UNICAMP-SP) Um fio condutor rígido de 200 g e 20 cm de comprimento é ligado ao restante do circuito através de contatos deslizantes sem atrito, como mostra a figura a seguir. O plano da figura é vertical. Inicialmente a chave está aberta. O fio condutor é preso a um dinamômetro e se encontra em uma região com campo magnético de 1,0 T, entrando perpendicularmente no plano da figura.



- Calcule a força medida pelo dinamômetro com a chave aberta, estando o fio em equilíbrio.
- Determine a direção e a intensidade da corrente elétrica no circuito após o fechamento da chave, sabendo-se que o dinamômetro passa a indicar leitura zero.
- Calcule a tensão da bateria sabendo-se que a resistência total do circuito é de  $6,0 \Omega$ .

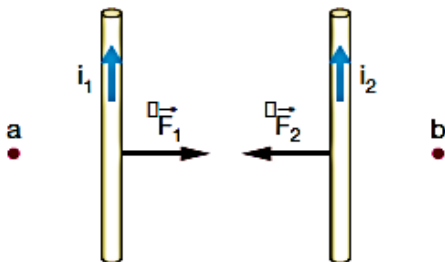
8. (UFOP-MG) Na figura, observa-se uma barra metálica horizontal, de comprimento  $l = 40 \text{ cm}$  e peso  $P = 2 \text{ N}$ . A barra, suspensa por duas metálicas iguais, de constante elástica  $k = 5 \text{ N/m}$ , se encontra em uma região onde existe um campo magnético uniforme  $B$ , horizontal e perpendicular à barra.



- Com a chave C desligada, encontre a deformação das molas.

b) Ligando-se a chave  $C$ , a barra é percorrida por uma corrente elétrica  $i = 5,0$  A. Determine o módulo de  $B$  e o sentido da corrente elétrica, para que as molas sejam comprimidas de 10 cm.

9. (UFRGS) Dois fios condutores, longos, retos e paralelos, são representados pela figura. Ao serem percorridos por correntes elétricas contínuas, de mesmo sentido e de intensidades  $i_1$  e  $i_2$ , os fios interagem através das forças  $F_1$  e  $F_2$ , conforme indica a figura ao lado. Sendo  $i_1 = 2 i_2$ , os módulos  $F_1$  e  $F_2$  das forças são tais que:



10. (UFSC) Considere um fio retilíneo infinito, no qual passa uma corrente  $i$ . Marque como resposta a soma dos valores associados às proposições verdadeiras.

01. Se dobrarmos a corrente  $i$ , o campo magnético gerado pelo fio dobra.

02. Se invertermos o sentido da corrente, inverte-se o sentido do campo magnético gerado pelo fio.

04. O campo magnético gerado pelo fio cai com  $\frac{1}{r^2}$ , onde  $r$  é a distância ao fio.

08. Se colocarmos um segundo fio, também infinito, paralelo ao primeiro e pelo qual passa uma corrente no mesmo sentido de  $i$ , não haverá força resultante entre fios.

16. Se colocarmos um segundo fio, também infinito, paralelo ao primeiro e pelo qual passa uma corrente no sentido inverso a  $i$ , haverá uma força repulsiva entre os fios.

32. Caso exista uma partícula carregada, próxima ao fio, será sempre diferente de zero a força que o campo magnético gerado pelo fio fará sobre a partícula.

Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas.

# Campo Magnético



Solenóide  
Linhas  
Magnético  
Uniforme  
Faraday

Cargas  
Campo  
Polos  
Espira  
Correntes

Velocidade  
Fio  
Indução  
Elétricas

# Cap. 4

## A Conservação da Energia



Movimento em uma montanha-russa.

### Introdução

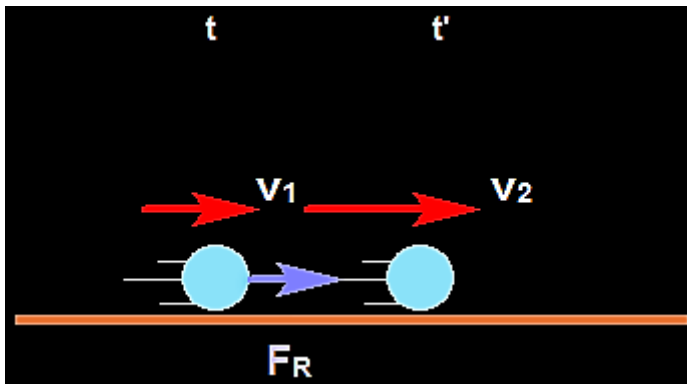
Estudaremos nesse capítulo um dos princípios físicos mais importantes, o *princípio da conservação da energia*. Sua validade é geral, não havendo até hoje nenhuma restrição sobre sua aplicação desde a microescala até a macro escala.

### Revisitando Trabalho de uma Força

Vimos no cap.3 a definição de trabalho de uma força, tanto para o caso da força constante quanto para o caso da força variável. Entendemos que a ideia de trabalho está associada à transferência de energia entre um sistema

(partícula) e sua vizinhança. Com essa noção em mente, vamos introduzir o conceito de energia cinética  $K$  da partícula.

Considere uma partícula de massa  $m$  em repouso sobre uma mesa horizontal muito longa e perfeitamente lisa. Se nenhuma força atua sobre a partícula, sabemos da segunda lei de Newton, que sua velocidade permanecerá sendo a mesma para todos os tempos de observação. Contudo, se um agente externo age sobre a partícula (exercendo força  $\vec{F}$  sobre ela), sua velocidade se modificará no tempo, ganhando velocidade enquanto a partícula estiver sendo empurrada pela força. Veremos que uma propriedade da partícula será alterada devido ao trabalho realizado por essa força enquanto a partícula se desloca. Para isto, consideremos o caso em que  $\vec{F}$  é constante.



**Figura 4. 1** - Partícula de massa  $m$  em repouso sobre uma mesa horizontal muito longa e perfeitamente lisa.

A Figura 4.1 representa uma partícula sendo observada entre dois instantes de tempo  $t$  e  $t'$ . Uma força resultante  $\vec{F} = \vec{F}_R$  horizontal para a direita atua sobre ela. As intensidades das velocidades da partícula são,  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente nos instantes  $t$  e  $t'$ . Seja  $\Delta x$  o deslocamento escalar sofrido pela partícula entre esses instantes de tempo sob a ação da força. A força resultante sobre a partícula poderá ser escrita na forma:

$$F_R = ma = m \left[ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} \right],$$

onde usamos  $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$  para determinarmos a aceleração da partícula entre os instantes  $t$  e  $t'$ .

O trabalho realizado pela força resultante é dado por:

$$W_{F_R} = F_R \Delta x = m \left[ \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\Delta x} \right] \Delta x = m \frac{v_2^2}{2} - m \frac{v_1^2}{2}.$$

Isto é, o trabalho da força resultante é dado pela diferença de uma mesma propriedade da partícula, a saber,  $m \frac{v^2}{2}$ , calculada nos instantes  $t'$  e  $t$ . Chamamos a essa propriedade de energia associada ao movimento ou energia cinética  $K$  da partícula

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

A validade do resultado acima é geral, mesmo que o tenhamos demonstrado para o caso particular em que a força é constante.

### Exercício Resolvido

Calcule as energias cinéticas dos corpos A, B e C, completando a tabela abaixo:

	massa	velocidade $v$	Energia cinética $K$
<b>A</b>	<b><math>m</math></b>	<b><math>v/3</math></b>	$K_A =$
<b>B</b>	<b><math>2m</math></b>	<b><math>v/2</math></b>	$K_B =$
<b>C</b>	<b><math>m/2</math></b>	<b><math>2v</math></b>	$K_C =$

### Solução

Usamos a definição  $K = \frac{mv^2}{2}$  para cada um dos corpos **A**, **B** e **C**.

$$K_A = \frac{m_A v_A^2}{2} = \frac{m \left(\frac{v}{3}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{18}.$$

$$K_B = \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{2m \left(\frac{v}{2}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

$$K_C = \frac{m_C v_C^2}{2} = \frac{m/2}{2} (2v)^2 = mv^2.$$

### Teorema da Energia Cinética (T.E.C.)

O que anunciamos anteriormente é conhecido na mecânica como teorema da energia cinética (T.E.C.):

“O trabalho realizado pela resultante de todas as forças que atuam sobre a partícula entre dois pontos de sua trajetória é igual à diferença de energia cinética sofrida pela partícula entre esses mesmos dois pontos”

$$W_{F_R} = \Delta K$$

Esse resultado será de grande importância na solução de problemas em mecânica.

A medida de energia cinética é a mesma de trabalho, sendo o joule no sistema internacional de unidades.

Trabalho da Resultante das Forças e Trabalho Total

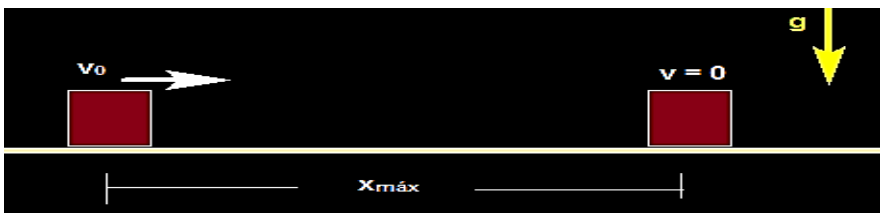
Outra forma de calcularmos o trabalho da força resultante que atua sobre a partícula é através do cálculo da soma dos trabalhos de todas as forças que atuam sobre ela.

$$W_{F_R} = W_{\vec{F}_1} + W_{\vec{F}_2} + \dots + W_{\vec{F}_N} = W_{total}$$

## Exercício Resolvido

Um corpo é lançado com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  sobre uma superfície plana onde existe atrito de coeficiente  $\mu$ . Use o teorema da energia cinética para calcular a distância máxima percorrida pelo bloco ao longo da superfície nos casos: (a) a superfície é horizontal; (b) a superfície é inclinada de ângulo  $\theta$  com relação à horizontal.

## Solução



As forças que atuam sobre o corpo são a normal ( $\vec{N}$ ), o peso ( $\vec{P}$ ) e força de atrito ( $\vec{f}_{at}$ ).  $\vec{N}$  e  $\vec{P}$  se cancelam e a resultante é  $\vec{f}_{at}$ .

Aplicando o T.E.C, encontramos:

$$W_{FR} = W_{\bar{N}} + W_{\bar{P}} + W_{\bar{f}_{at}} = \Delta K,$$

$$-\mu mg x_{m\acute{a}x} = 0 - \frac{mv_0^2}{2},$$

$$x_{m\acute{a}x} = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

(b) Faça voc\^e!

## Pot\^encia M\^edia e Pot\^encia Instant\^anea

Em muitos problemas de engenharia \^e importante associarmos uma esp\^ecie de "velocidade" para realiza\~ao de trabalho, grandeza a qual chamaremos de pot\^encia.

Definimos a pot\^encia media  $P_m$  como a raz\~ao entre o trabalho  $W$  realizado e o intervalo de tempo  $\Delta t$  necess\^ario para realiz\~a-lo:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}. \quad 4.5$$

Definimos a pot\^encia instant\^anea  $P$  como o limite para o qual tende a pot\^encia m\^edia  $P_m$  quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tende a zero:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t}. \quad 4.6$$

Rela\~ao entre Pot\^encia e Velocidade

Da mesma forma que o trabalho a pot\^encia est\^a associada a uma for\~ca.

Usando,

$$W = F\Delta x, \quad 4.7$$

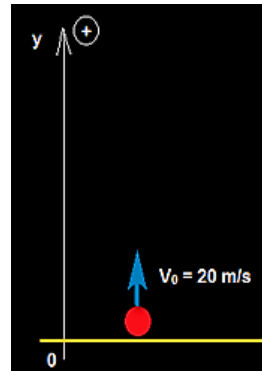
Na defini\~ao de pot\^encia instant\^anea, encontramos a rela\~ao entre as grandezas pot\^encia e a velocidade instant\^neas da part\^icula:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} P_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F\Delta x}{\Delta t} = F \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = Fv. \quad 4.8$$

A medida de pot\^encia no sistema internacional de unidades \^e o joule/segundo conhecida como watt (W).

## Exercício Resolvido

Usando o que você aprendeu até agora sobre trabalho e potência resolva o seguinte problema: Uma partícula é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial de módulo 20 m/s a partir do solo. Considerando o módulo da aceleração da gravidade local igual a 10 m/s<sup>2</sup> e que a resistência do ar é desprezível, determine: (a) A altura máxima atingida; (b) A velocidade ao retornar ao solo



## Solução

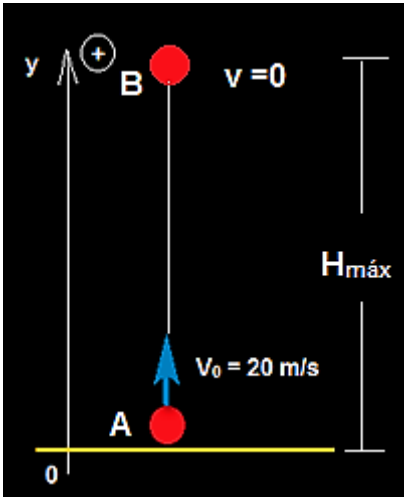
Já resolvemos esse problema usando as equações da cinemática. Vamos resolvê-lo usando considerações de energia.

(a) Na ausência de resistência do ar a resultante das forças sobre o corpo é o peso. Desta forma, o teorema da energia cinética fica:

$$W_p = \Delta K$$

A variação da energia cinética entre os pontos A e B indicados na figura e o trabalho da força peso valem, respectivamente:

$$K_B - K_A = 0 - \frac{m}{2} v_0^2 = -m \frac{20^2}{2} = -200 m,$$



$$W_P = -mgH_{m\acute{a}x} = -10mH_{m\acute{a}x}.$$

$$-10mH_{m\acute{a}x} = -200 m,$$

$$H_{max} = 20 m$$

(b) A velocidade ao retornar ao solo é calculada com o mesmo raciocínio. Os pontos inicial (A) e final (B) são os mesmos. Temos:

$$W_P = \Delta K$$

$$0 = K_B - K_A,$$

$$K_B = K_A$$

$$\frac{m}{2} v_B^2 = \frac{m}{2} v_0^2 \rightarrow v_B^2 = v_0^2 = 400.$$

As soluções possíveis são:  $v_B = \pm 20 \frac{m}{s}$ . Como o movimento é

descendente, contra a trajetória,  $v_B = -20 \frac{m}{s}$ .

## Exercício Resolvido

Ainda no exercício anterior calcule pelas equações da cinemática o tempo de queda da partícula e as potências média e instantânea associada a força peso.

## Solução

Da cinemática sabemos que o tempo de descida é igual ao tempo de subida:

$$t_d = t_s = \frac{v_0}{g} = 2 s.$$

A potência média da força peso na queda vale:

$$P_m = \frac{W_p}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t} = \frac{200m}{2} = 100m,$$

Isto é, 100 vezes a massa transportada.

Já a potência instantânea, associada à força peso, é o produto da força pela velocidade instantânea.

$$P = Fv = mg(v_0 - gt) = 10m(20 - 10t), \quad t > 2s.$$

## Trabalho da Força Peso e Energia Potencial Gravitacional

Já fizemos o estudo da força e do campo gravitacional. Vimos que a força peso é uma *força conservativa* e uma *energia potencial* está associada a ela. A diferença de energia potencial gravitacional  $\Delta U_g$  sofrida por uma massa  $m$  ao ser deslocada de um ponto A, a uma altura  $h_A$ , até um ponto B a uma altura  $h_B$ , ambos relativamente ao solo ( $h = 0$ ) num campo gravitacional uniforme é:

$$\Delta U_g = U_B - U_A = mgh_B - mgh_A. \quad 4.9$$

O trabalho da força peso é dado pelo simétrico dessa variação

$$W_p = -\Delta U_g. \quad 4.10$$

### Exercício Resolvido

Um corpo de massa  $m$  cai de uma altura  $h$  até o solo ( $h = 0$ ) numa região de campo gravitacional  $\vec{g}$  uniforme. Calcule (a) o trabalho realizado pela força peso; (b) a variação da energia potencial gravitacional sofrida pela massa  $m$ .

### Solução

(a) Na queda  $W_p = mgh$ ;

(b)

$$\Delta U_g = U_B - U_A = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A).$$

$$\Delta U_g = mg(0 - h) = -mgh = -W_p.$$

## Trabalho da Força Elástica e Energia Potencial Elástica

Como vimos nos capítulos iniciais deste livro, uma mola que sofre uma pequena deformação  $x$  em seu comprimento obedece a chamada lei de Hooke,

$$F_{EL} = -kx, \quad 4.11$$

onde  $x$  é a deformação e  $k$  é uma constante característica da mola. O sinal negativo indica que  $F_{EL}$  é sempre no sentido de fazer restituir o comprimento da mola sem deformação. Por isso  $F_{EL}$  é conhecida por força restauradora. Sendo a força elástica uma força variável com a posição (depende do valor  $x$  da deformação da mola), seu trabalho é encontrado pela área da Figura 4.2 do gráfico  $F_{EL}$  versus  $x$ .

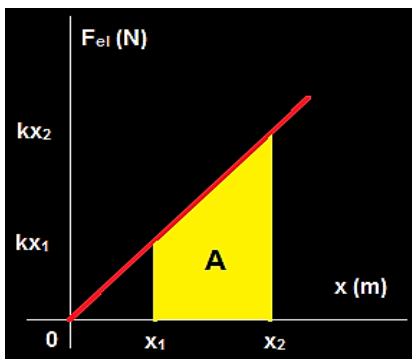


Figura 4.2 - Gráfico  $F_{EL}$  versus  $x$ .

$$A = A_{\text{trapézio}}$$

$$A = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

Chamamos de energia potencial elástica  $U_{EL}(x)$  a energia acumulada na mola quando está deformada. É dada pela expressão:

$$U_{EL}(x) = \frac{kx^2}{2}, \quad 4.12$$

$$|W_{F_{EL}}| = \frac{k}{2}(x_2^2 - x_1^2). \quad 4.13$$

cuja unidade de medida é o joule.

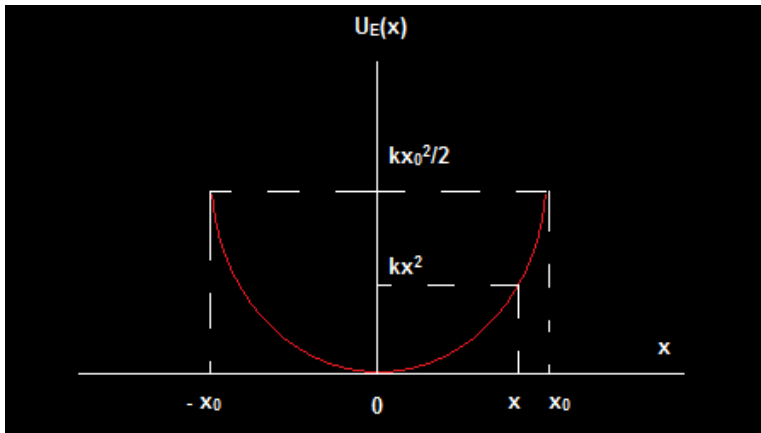
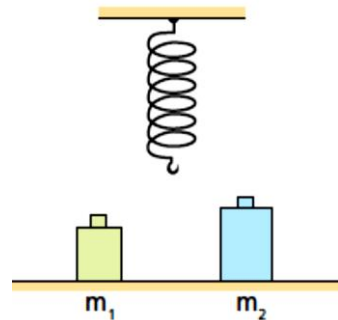


Figura 4.3 - Gráfico da energia potencial elástica.

### Exercício Resolvido

(UFPE) Duas massas,  $m_1 = 2,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 4,0 \text{ kg}$ , são suspensas sucessivamente em uma mesma mola vertical. Se  $U_1$  e  $U_2$  são, respectivamente, as energias elásticas armazenadas na mola quando as massas  $m_1$  e  $m_2$  foram penduradas e  $U_1 = 2,0 \text{ J}$ , qual o valor de  $U_2$ ?



### Solução

O enunciado do problema não revela isso, mas devemos supor que cada massa é conectada à mola e baixada lentamente até a posição de equilíbrio. No equilíbrio,

$$kx = mg \rightarrow x = \frac{mg}{k}.$$

A energia potencial elástica é:

$$U = k \frac{x^2}{2}.$$

Ao pendurarmos as massas  $m_1$  e  $m_2$  as energias potenciais elásticas que a mola armazena na posição de equilíbrio valem, respectivamente:

$$U_1 = \frac{k}{2} \left( \frac{m_1 g}{k} \right)^2 = \frac{(m_1 g)^2}{2k},$$

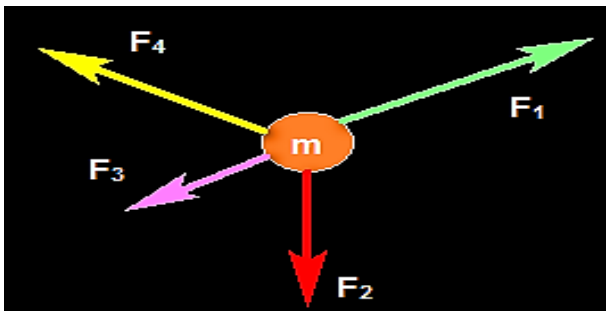
$$U_2 = \frac{k}{2} \left( \frac{m_2 g}{k} \right)^2 = \frac{(m_2 g)^2}{2k}.$$

Desta forma:

$$U_2 = U_1 \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^2 = 2,0 \cdot 2^2 = 8 J.$$

## Sistema de Forças Conservativas

Dizemos que um sistema de forças é conservativo quando todas as forças envolvidas são conservativas. Se pelo menos uma das forças é não conservativa o sistema deixa de ser conservativo. Mas, afinal o que se conserva quando as forças que atuam sobre a partícula são todas conservativas? Veremos que uma propriedade do sistema, chamada de energia mecânica será independente do tempo, isto é, se conserva. Para isto considere o caso do sistema conservativo formado pelas forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$  indicadas na Figura 4.



**Figura 4. 4** - Sistema conservativo formado pelas forças  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  e  $\vec{F}_4$ .

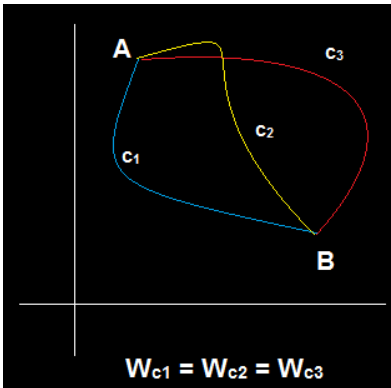
Podemos escrever então:

$$W_{F_R} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + W_{F_4} = W_{total} \quad 4.14$$

Como cada uma das forças que compõem o sistema de força é conservativa seus trabalhos podem ser trocados pela variação da energia potencial correspondente.

$$W_{F_N} = -\Delta U_N. \quad 4.15$$

Vimos que a propriedade de garante que uma força é conservativa é a *independência do caminho* que liga os pontos inicial e final no cálculo do trabalho.



Combinando esse resultado com o Teorema da Energia Cinética, encontramos um importante resultado

$$W_{F_R} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + W_{F_4},$$

**Figura 4.5** - Representação do trabalho em trajetórias diferentes.

$$\Delta K = -\Delta U_1 - \Delta U_2 - \Delta U_3 - \Delta U_4 = -\Delta(U_1 + U_2 + U_3 + U_4),$$

$$\Delta K = -\Delta U_{total} = -\Delta U. \quad 4.16$$

Transpondo  $-\Delta U$  para o primeiro membro resulta:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0. \quad 4.17$$

O que esta equação está nos dizendo é que, quando o sistema de forças é conservativo, existe uma propriedade, a saber, a soma  $K + U$  que não varia no tempo. Chamamos esta soma de energia mecânica ( $E$ ) do sistema:

$$E = K + U \quad 4.18$$

Se escrevermos esta soma no instante de tempo  $t_0$  seu valor terá que ser o mesmo para qualquer outro instante de tempo  $t$ .

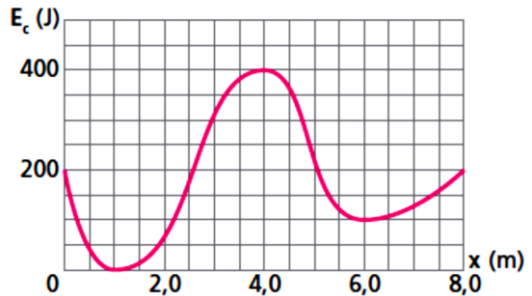
$$E(t_0) = E(t), \quad 4.19$$

$$K_0 + U_0 = K + U. \quad 4.20$$

### Exercício Resolvido

(PUC-SP) O gráfico representa a energia cinética de uma partícula de massa 10 g, sujeita somente a forças conservativas, em função da abscissa  $x$ . A energia mecânica do sistema é de 400 J.

- a) Qual a energia potencial para  $x = 1,0$  m e para  $x = 4,0$  m?  
 b) Calcule a velocidade da partícula para  $x = 8,0$  m.



### Solução

Como o sistema é conservativo a energia mecânica do sistema é constante. Seu valor é o mesmo em todos os pontos. De acordo com o enunciado  $E_M = 400$  J.

$$(a) \quad E_M = K + U \rightarrow U = E_M - K = 400 - 0 = 400 \text{ J em } x = 1\text{m}.$$

$$U = E_M - K = 400 - 400 = 0 \text{ J em } x = 4\text{m}.$$

$$(b) \quad \text{Em } x = 8\text{m}, K \text{ vale } 200 \text{ J}.$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200}{10 \cdot 10^{-3}}} = 2 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

## Sistema de Forças não Conservativo

Considere agora o caso que pelo menos uma das forças que constitui o sistema de forças é não conservativa essa igualdade não é mais válida,

$$K_0 + U_0 \neq K + U. \quad 4.21$$

Dizemos neste caso que o sistema de forças é não conservativo. A energia mecânica não é mais constante, ao contrário, diminui com o tempo.

$$\Delta E_M < 0. \quad 4.22$$

Essa diferença entre a energia mecânica inicial e final é justamente igual ao trabalho da força não conservativa

$$\Delta E_M = E_{final} - E_{inicial} = W_{atrito}. \quad 4.23$$

Chamamos em geral o trabalho da força de atrito de energia dissipada.

$$\Delta E_{M_B} = E_{final} - E_{inicial} = E_{dissipada}. \quad 4.24$$

### Em Resumo

Se no problema considerado não existe força de atrito a energia mecânica se conserva,

$$E_{M_A} = E_{M_B},$$

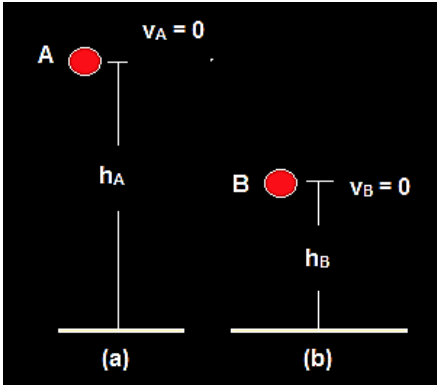
onde A e B são pontos da trajetória escolhidos. Se no problema considerado existe força de atrito a energia não se mecânica se conserva, e a diferença de energia mecânica é igual ao trabalho do atrito,

$$\Delta E_{M_B} = E_{dissipada} = W_{atrito}.$$

## Exercício Resolvido

(Mack-SP) Uma bola de borracha de massa  $1,0 \text{ kg}$  é abandonada da altura de  $10 \text{ m}$ . A energia mecânica perdida por essa bola ao se chocar com o solo é  $28 \text{ J}$ . Supondo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule a altura máxima atingida pela bola após o choque com o solo.

## Solução



O sistema em questão não é conservativo. A energia mecânica perdida quando a bola bate no solo vale:

$$\Delta E_M = -28 \text{ J}.$$

$$\begin{aligned} E_{M_B} - E_{M_A} &= \Delta E_M = -28 \text{ J} \\ mg(h_B - h_A) &= -28 \\ h_B &= \frac{-28}{mg} + h_A \\ h_B &= 7,2 \text{ m}. \end{aligned}$$

## Resumo do Capítulo

1. A energia associada ao movimento de uma partícula de massa  $m$  é:

$$K = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

2. O trabalho realizado pela força resultante sobre uma partícula entre dois pontos é igual a diferença de energia cinética da partícula entre esses dois pontos.

3. A potência média associada ao trabalho realizado por uma força é dada por:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t}$$

A potência pode também ser calculada por:

$$P = F \cdot v$$

4. O trabalho da força peso sobre uma partícula é dado pelo simétrico da variação da energia potencial gravitacional:

$$W_p = -\Delta U_g$$

5. O trabalho realizado por uma força elástica é dado por:

$$W_{FE} = \frac{k \cdot (x_2^2 - x_1^2)}{2}$$

6. A energia potencial elástica armazenada em uma mola é dada por:

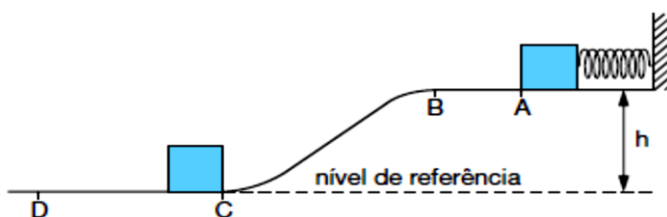
$$U_{EL} = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

7. Dizemos que um sistema de forças é conservativo quando todas as forças envolvidas são conservativas.

## Exercícios do Capítulo 4

1. (UFV-MG) Um bloco de massa  $m$  é mantido em repouso no ponto A da figura, comprimindo de uma distância  $x$  uma mola de constante elástica  $k$ . O bloco, após abandonado, é empurrado pela mola e após liberado por essa passa pelo ponto B chegando em C. Imediatamente depois de chegar no ponto C, esse bloco tem uma colisão perfeitamente inelástica com outro bloco, de massa  $M$ , percorrendo o conjunto uma distância  $L$  até parar no ponto D. São desprezíveis os atritos no trecho compreendido entre os pontos A e C. Considere os valores de  $m$ ,  $x$ ,  $k$ ,  $h$ ,  $M$  e  $L$ , bem como o módulo da aceleração gravitacional local,  $g$ , apresentados a seguir:

$m$	$x$	$k$	$h$	$M$	$L$	$g$
2,0 kg	10 cm	3 200 N/m	1,0 m	4,0 kg	2,0 m	10 m/s <sup>2</sup>

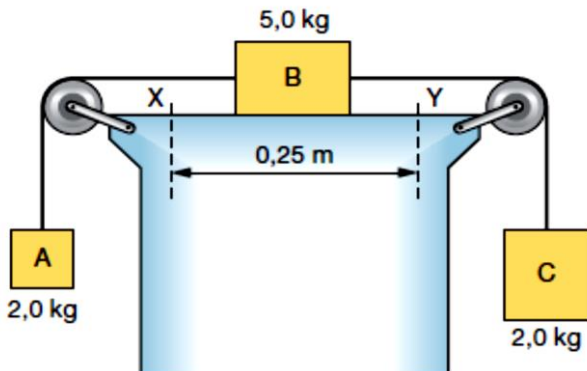


a) Calcule a(s) modalidade(s) de energia mecânica em cada ponto apresentado abaixo, completando o quadro, no que couber, atentando para o nível de referência para energia potencial gravitacional, assinalado na figura.

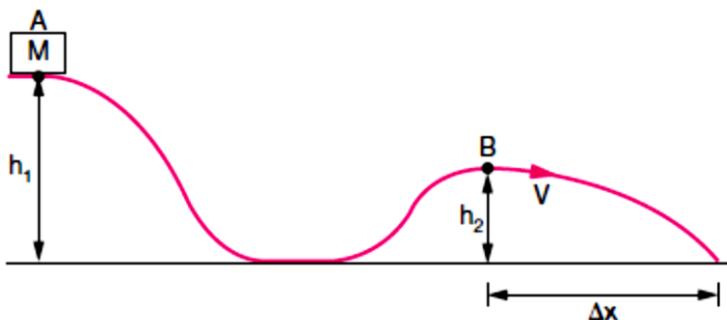
Ponto	Modalidade de Energia Mecânica				Energia Mecânica Total (J)
	Energia Potencial Gravitacional (J)	Energia Potencial Elástica (J)	Energia Cinética (J)	Outra (J)	
A					
B					

- b) Calcule a velocidade do bloco quando chega em C.  
 c) Supondo os dois blocos do mesmo material, determine o coeficiente de atrito cinético entre os blocos e a superfície plana.

2. (MACK-SP) No conjunto abaixo, os fios e as polias são ideais e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e a mesa é  $\mu = 0,2$ . Num dado instante, esse corpo passa pelo ponto X com velocidade  $0,50 \text{ m/s}$ . No instante em que ele passar pelo ponto Y, qual será a energia cinética do corpo A?



3. (UFLA-MG) Um bloco de massa  $M = 10 \text{ kg}$  desliza sem atrito entre os trechos A e B indicados na figura abaixo. Supondo  $g$  (aceleração da gravidade)  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $h_1 = 10 \text{ m}$  e  $h_2 = 5 \text{ m}$ . Obtenha a velocidade do bloco no ponto B.



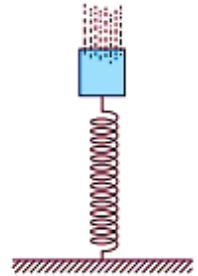
4. (FUVEST-SP) A equação da velocidade de um móvel de  $20 \text{ kg}$  é dada, no sistema internacional de unidades por:

$$v = 3,0 + 0,2t.$$

Qual a energia cinética desse móvel no instante  $t = 20 \text{ s}$ ?

5. (FAFI-BH) Um atleta atira uma bola de 0,5 kg para cima, com velocidade inicial de 10 m/s. Admita que a energia potencial inicial seja nula. (Use  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ). Com relação a essa situação, é correto afirmar que a energia mecânica total quando a bola estiver no topo da trajetória, é:

6. (PUC-MG) Na figura desta questão a mola tem constante elástica  $k = 1,0 \times 10^3 \text{ N/m}$  e está comprimida de 0,20 m. A única força horizontal que atua na esfera após ela ter abandonado a mola é a força de atrito cinético, que é constante e vale 10 N. A distância percorrida pela esfera, em metros, até parar, é:



7. (UNIPA-MG) Uma pequena esfera é solta de uma altura  $H_A$  (onde  $H_A > H_C$ ) para realizar o movimento sobre a superfície regular mostrada na figura abaixo.

Sabendo-se que a velocidade da bolinha no ponto C é nula, foram feitas as seguintes afirmações:

I – apenas uma parte da energia potencial inicial da esfera foi mantida como energia potencial no final do movimento.

II – as forças que atuam no experimento acima são conservativas.

III – a energia mecânica da esfera no ponto A é igual à sua energia mecânica no ponto B.

Pode-se afirmar que:

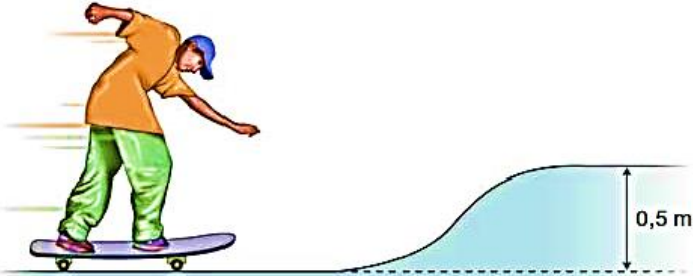
- a) apenas a afirmativa I é verdadeira
- b) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
- c) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras
- d) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras
- e) todas as afirmativas são verdadeiras

8. (UEPA) As conhecidas estrelas cadentes são na verdade meteoritos (fragmentos de rocha extraterrestre) que, atraídos pela força gravitacional da Terra, se aquecem ao atravessar a atmosfera, produzindo o seu brilho. Denotando a energia cinética por  $E_C$ , a energia potencial por  $E_P$  e a energia térmica por  $E_t$ , a sequência de transformações de energia envolvidas desde o instante em que o meteorito atinge a atmosfera são, nesta ordem:

- a)  $E_C \rightarrow E_P$  e  $E_C \rightarrow E_t$
- b)  $E_C \rightarrow E_P$  e  $E_P \rightarrow E_t$
- c)  $E_P \rightarrow E_C$  e  $E_C \rightarrow E_t$
- d)  $E_P \rightarrow E_t$  e  $E_t \rightarrow E_C$
- e)  $E_t \rightarrow E_P$  e  $E_t \rightarrow E_C$

9. (ESAM-RN) Uma criança de massa igual a 20 kg desce de um escorregador com 2 m de altura e chega no solo com velocidade de 6 m/s. Sendo  $10 \text{ m/s}^2$ , o módulo da aceleração da gravidade local, a energia mecânica dissipada, em joules, é igual a:

10. (VUNESP-SP) Para tentar vencer um desnível de 0,5 m entre duas calçadas planas e horizontais, mostradas na figura, um garoto de 50 kg, brincando com um *skate* (de massa desprezível), impulsiona-se até adquirir uma energia cinética de 300 J.



Desprezando-se quaisquer atritos e considerando-se  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , pode-se concluir que, com essa energia:

- a) não conseguirá vencer sequer metade do desnível.
- b) conseguirá vencer somente metade do desnível.
- c) conseguirá ultrapassar metade do desnível, mas não conseguirá vencê-lo totalmente.
- d) não só conseguirá vencer o desnível, como ainda lhe sobrarão pouco menos de 30 J de energia cinética.
- e) não só conseguirá vencer o desnível, como ainda lhe sobrarão mais de 30 J de energia cinética.

Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas:

# A Conservação da Energia



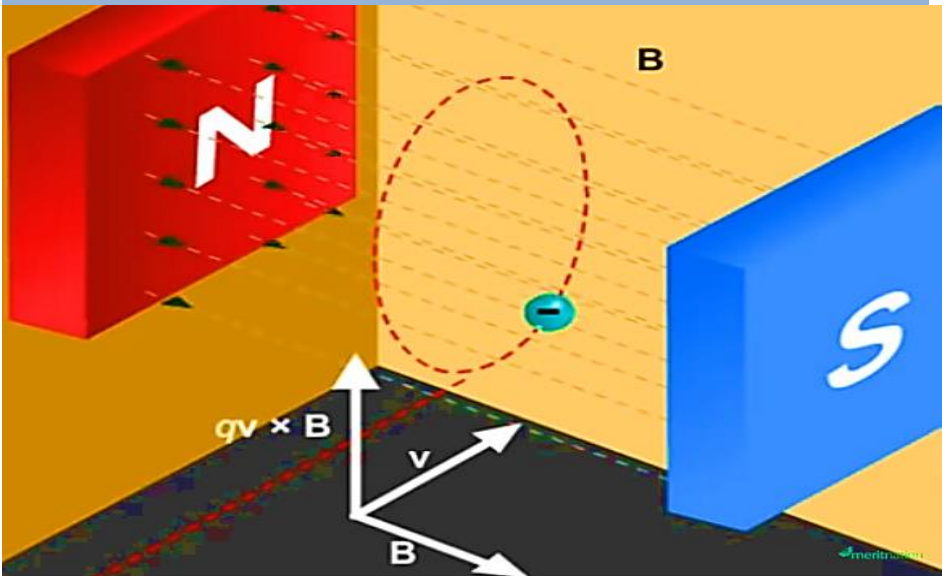
Resultante  
Energia  
Potência  
Força  
Trabalho

Instantânea  
Média  
Elástica  
Velocidade  
Conservativo

Cinética

# Cap. 5

## Dinâmica do Movimento Circular Uniforme



Partícula descrevendo um movimento circular uniforme sob ação de um campo magnético.

### Introdução

Vamos fazer o estudo da Dinâmica do movimento Circular através do comportamento das partículas carregadas quando são lançadas numa região onde um campo magnético está presente. Trataremos o caso mais simples para o movimento das partículas e introduziremos o movimento circular e uniforme para o qual seremos levados pelos resultados experimentais.

## Dinâmica do Movimento Circular Uniforme (M.C.U)

No cap. 3 vimos que quando uma carga elétrica  $q$  é lançada com velocidade  $\vec{v}$  no interior de um campo magnético, ela fica sujeita a uma força magnética cuja intensidade é dada por:

$$F_m = B \cdot |q| \cdot v \cdot \text{sen}\theta, \quad 5.1$$

onde  $B$  é a intensidade do campo magnético  $\vec{B}$ ,  $v$  é a intensidade da velocidade  $\vec{v}$  e  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ .

Observe a figura introdutória do capítulo. Nela vemos uma experiência realizada num laboratório de Física onde uma partícula de carga  $q < 0$  e massa  $m$  lançada com velocidade  $\vec{v}$  numa região de campo magnético  $\vec{B}$  uniforme. A direção de  $\vec{B}$  é horizontal e sentido para a direita e a velocidade  $\vec{v}$  da partícula forma um ângulo de  $90^\circ$  com  $\vec{B}$  ( $\text{sen } 90^\circ = 1$ ), isto é o caso particular de um *lançamento perpendicular* as linhas do campo. A experiência mostra que a partícula executa um movimento circular. Para este caso o módulo força magnética sobre a partícula é:

$$F_m = B \cdot |q| \cdot v. \quad 5.2$$

Sua direção radial e que aponta para o centro da trajetória que é uma circunferência. A força magnética  $\vec{F}_m$  é sempre perpendicular à velocidade  $\vec{v}$  da partícula. Uma força com essas características é chamada de *Força Centrípeta* ( $\vec{F}_{cp}$ ).

Vamos usar o Teorema da Energia Cinética (TEC.) para mostrar que a força centrípeta é incapaz de alterar a *intensidade da velocidade* da partícula, só podendo modificar a sua direção.

Desprezando efeitos gravitacionais a força resultante sobre a partícula é a força magnética  $\vec{F}_m$ . Aplicando o TEC encontramos:

$$W_{\vec{F}_R} = W_{\vec{F}_m} = W_{\vec{F}_{cp}} = \Delta K = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2). \quad 5.3$$

Como  $\vec{F}_{cp}$  é perpendicular a direção do deslocamento (perpendicular a velocidade instantânea da partícula) seu trabalho sempre é nulo. Desta

forma a energia cinética da partícula sob a ação de uma força centrípeta não pode mudar:

$$0 = \Delta K = \frac{m}{2}(v_f^2 - v_i^2). \quad 5.4$$

Portanto a velocidade da partícula possui intensidade constante durante todo tempo em que se processa o movimento, mudando somente em direção.

### Em resumo:

A Força centrípeta é incapaz de alterar a intensidade da velocidade da partícula, mudando somente a direção de  $\vec{v}$ .

O trabalho realizado pela força centrípeta sobre a partícula sempre é nulo.

Chamamos de **Movimento Circular Uniforme (MCU)** ao movimento de uma partícula que tem sua trajetória em forma de circunferência, cuja a intensidade da velocidade instantânea  $\vec{v}$  é constante e que está sujeita a uma força do tipo centrípeta.

### Aceleração Centrípeta ( $\vec{a}_{cp}$ ) e Força Centrípeta

Já sabemos que a *aceleração vetorial instantânea*  $\vec{a}$  é definida como o limite da aceleração vetorial média quando intervalo de tempo  $\Delta t$  tende a zero, isto é:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad 5.5$$

Chamaremos essa aceleração de centrípeta quando a variação  $\Delta \vec{v}$  de sua velocidade vetorial  $\vec{v}$  é decorrente apenas de sua variação na direção, permanecendo com sua intensidade  $v$  constante, como ocorre no MCU. É possível mostrar que a intensidade da aceleração centrípeta  $\vec{a}_{cp}$  está relacionada com a intensidade  $v$  da velocidade vetorial da partícula e com o raio  $r$  da circunferência pela expressão:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}. \quad 5.6$$

Deste resultado e do Princípio Fundamental da Dinâmica (2ª Lei de Newton para o movimento) calculamos a intensidade da força centrípeta que gera o movimento circular uniforme,

$$F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r}. \quad 5.7$$

**Em resumo:**

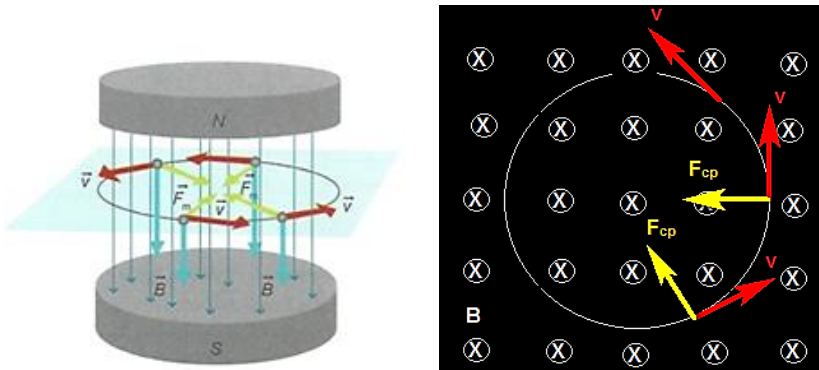
O MCU é um movimento descrito por uma partícula cuja trajetória é uma circunferência gerado por uma força do tipo centrípeta cuja intensidade é dada por

$$F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r}$$

A velocidade  $\vec{v}$  da partícula possui somente intensidade constante variando continuamente em direção. É um movimento acelerado e sua aceleração é do tipo centrípeta.

**Exercício Resolvido**

Uma partícula que possui massa  $m$  e carga  $q$  é lançada, numa região de campo magnético uniforme de direção vertical, sentido para baixo e de intensidade  $B$ , com velocidade de intensidade  $v$  perpendicularmente à direção de  $\vec{B}$  como mostra a figura. Determine o raio  $r$  da trajetória circular descrita pela partícula.



## Solução

A força magnética é a resultante centrípeta. Igualando as equações  $F_m = F_{cp}$ , encontramos:

$$B|q|v = m \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

## Exercício Resolvido

Resolva numericamente o exercício anterior considerando  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ,  $B = 2 \text{ T}$ ,  $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  e  $|q| = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

## Solução

$$R = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 100}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

## Movimento Helicoidal

Suponha que a partícula seja lançada obliquamente em relação ao campo  $\vec{B}$ . Neste caso a velocidade vetorial  $\vec{v}$  possui duas componentes, uma perpendicular  $\vec{v}_{\text{perpendicular}} = \vec{v}_{\perp}$  e outra paralela  $\vec{v}_{\text{paralelo}} = \vec{v}_{\parallel}$  ao campo. Que movimento a partícula executará? A resposta a essa pergunta é uma superposição de dois movimentos.

Um gerado pela componente perpendicular da velocidade, que como sabemos é circular e o outro gerado pela componente paralela ao campo. A partícula gira ao mesmo tempo que se move para frente. Chamamos esse movimento de helicoidal (em forma de hélice). A Figura 5.1 mostra mais claramente esses fatos.

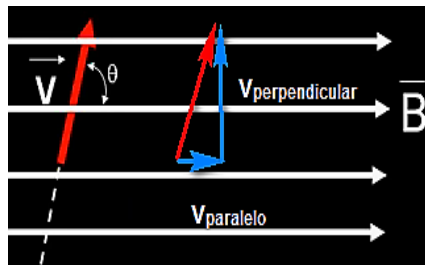


Figura 5.1 – Partícula lançada obliquamente em relação ao campo  $\vec{B}$ .

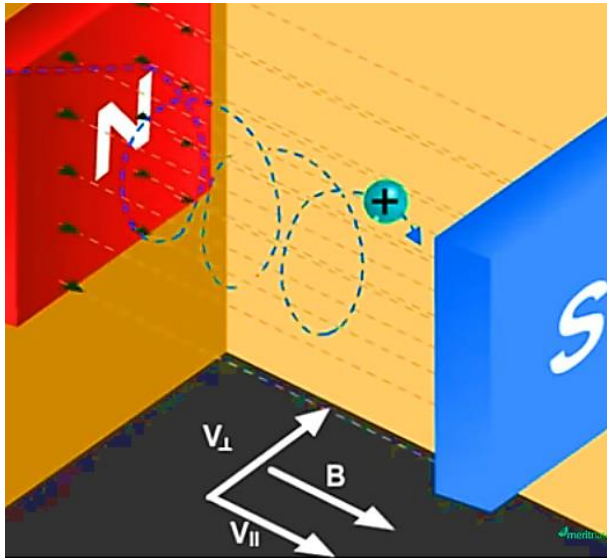
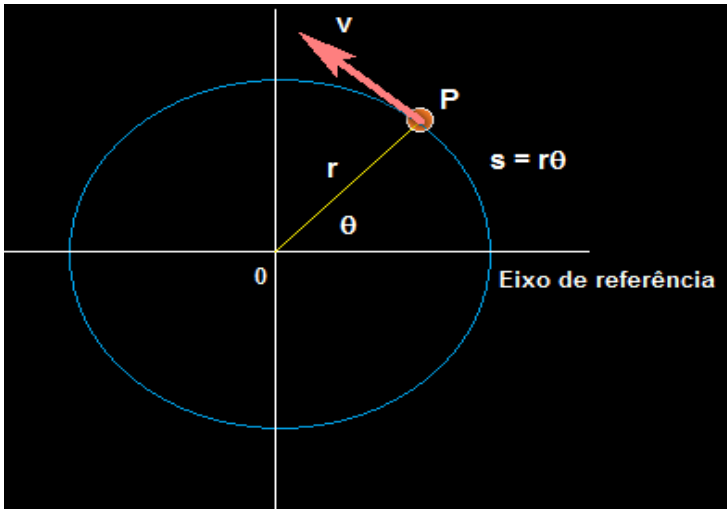


Figura 5. 2 – Movimento helicoidal.

## Função horária da posição no MCU

A Figura 5.3 mostra uma partícula P se movendo ao longo de uma circunferência de raio  $r$  no sentido anti-horário, com velocidade vetorial de intensidade  $v$ . Se quisermos localizar a partícula P em cada instante de tempo existem duas maneiras para fazer isto: a primeira medindo-se o comprimento do arco da circunferência  $s$  a partir do eixo horizontal chamado de eixo ou reta de referência. Enquanto a partícula P se movimenta os comprimentos de arcos  $s$  serão dados como função do tempo  $s = s(t)$ . A segunda é feita medindo-se o ângulo  $\theta$  medido entre o raio da circunferência e o eixo de referência em cada instante de tempo. Para cada instante de tempo o ângulo central  $\theta$  será da como função do tempo  $\theta = \theta(t)$ . Essas medidas, do comprimento do arco  $s$  e a medida do ângulo  $\theta$  estão relacionadas pela expressão 5.8:

$$\theta = \frac{s}{r} (\text{rad}) \quad 5.8$$



**Figura 5. 3** - Partícula P se movendo ao longo de uma circunferência de raio  $r$  no sentido anti-horário, com velocidade vetorial de intensidade  $v$ .

Por exemplo, se o arco descrito pela partícula corresponde a  $\frac{1}{4}$  de volta seu comprimento será:

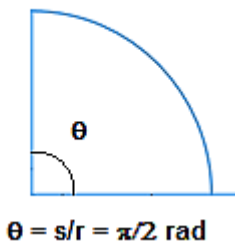
$$s = \frac{1}{4} 2\pi r = \frac{\pi r}{2}, \quad 5.9$$

onde  $2\pi r$  é o arco completo ou arco de uma volta. Neste caso a medida do ângulo  $\theta$  é dada por:

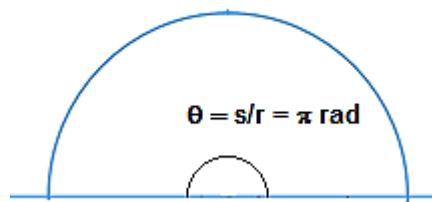
$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{\pi r}{2r} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} \quad 5.10$$

O mesmo raciocínio para o arco de meio volta  $s = \frac{1}{2} 2\pi r = \pi r$  leva ao resultado  $\theta = \pi \text{ (rad)}$ .

**arco de 1/4 de volta  $s = \pi r/2$**



**arco de 1/2 de volta  $s = \pi r$**



Portanto,

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ. \quad 5.11$$

Para cada instante de tempo vale a relação:

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{r}. \quad 5.12$$

Chamamos a variável  $\theta(t)$  de posição angular da partícula e  $s(t)$  de posição linear.

O mesmo valerá para os deslocamentos angular  $\Delta\theta$  e linear  $\Delta s$ ,

$$\Delta\theta(t) = \frac{\Delta s(t)}{r}. \quad 5.13$$

Usando a função horária da posição do movimento uniforme (forma escalar),

$$s(t) = s_o + vt, \quad 5.14$$

encontramos a forma angular  $\theta(t)$  do MCU,

$$\theta(t) = \frac{s_o}{r} + \frac{v}{r}t = \theta_o + \omega t, \quad 5.15$$

onde definimos  $\omega = \frac{v}{r}$  que chamamos de velocidade angular instantânea da partícula, medida em  $\left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$  no sistema internacional de unidades.

### Exercício Resolvido

Faça a transformação dos ângulos medidos em graus ( $^\circ$ ) para as suas correspondentes medidas em radianos (rad) (a)  $30^\circ$ ; (b)  $45^\circ$ ; (c)  $60^\circ$ .

### Solução

Sabemos a seguinte relação entre rad e graus:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

(a) Para  $\theta = 30^\circ$  fazemos:

$$\begin{aligned} \pi \text{ rad} &= 180^\circ \\ x \text{ rad} &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$180 x = 30 \pi$$
$$x = \frac{30}{180} \pi = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Assim,

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

(b) Também podemos ver que:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Desta forma,

$$45^\circ = 45 \cdot 1^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Analogamente,

$$60^\circ = 60 \cdot 1^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

## Aceleração Centrípeta e Força Centrípeta em Função da Velocidade Angular

Das relações já conhecidas,  $a_{cp} = \frac{v^2}{r}$ ,  $F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r}$  e  $\omega = \frac{v}{r}$  escrevemos:

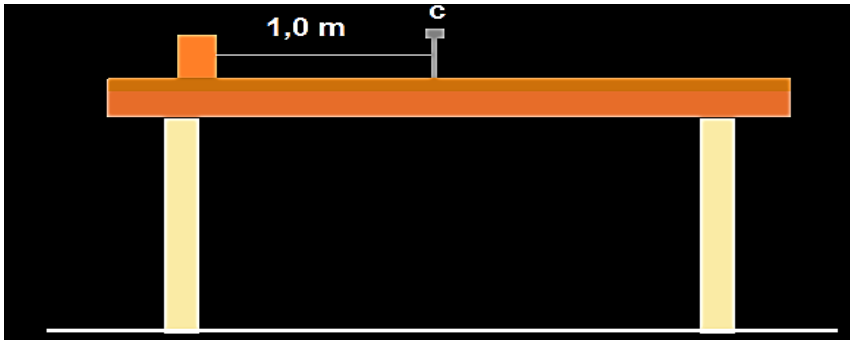
$$a_{cp} = \omega^2 r, \quad 5.16$$

$$F_{cp} = m\omega^2 r, \quad 5.17$$

que são as expressões da aceleração e força centrípeta, respectivamente, dadas como funções do raio  $r$  e da velocidade angular  $\omega$ .

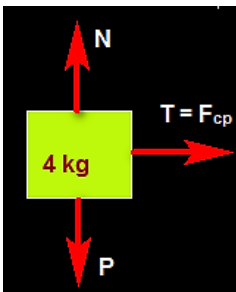
### Exercício Resolvido

Um bloco de massa 4,0 kg descreve movimento circular e uniforme sobre uma mesa horizontal perfeitamente polida. Um fio ideal, de 1,0 m de comprimento, prende-o a um prego **C**, conforme ilustra o esquema. Se a força de tração no fio tem intensidade  $1,0 \cdot 10^2$  N, qual a velocidade angular do bloco, em rad/s?



## Solução

Na ausência de atrito a única força que tem a direção do centro C da curva é a tração  $\vec{T}$ . As forças peso  $\vec{P}$  e normal  $\vec{N}$  não têm a direção de C e não contribuem para a resultante centrípeta.



$$T = F_{cp}$$

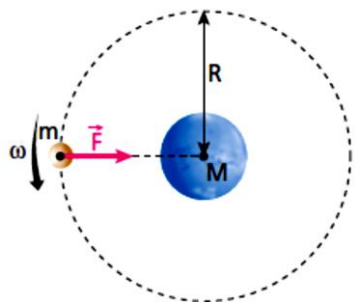
$$T = m\omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{mR}} = \sqrt{\frac{10^2}{4.1}} = \sqrt{25} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

## Exercício Resolvido

Um satélite de massa  $m$  descreve uma órbita circular de raio  $R$  em torno de um planeta de massa  $M$ . Sendo  $G$  a Constante da Gravitação, responda:

- Qual a velocidade angular  $\omega$  do satélite?
- O valor de  $\omega$  depende de  $m$ ?



## Solução

(a) Neste caso a resultante centrípeta é a força gravitacional entre o planeta e o satélite:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{F}_G$$
$$m\omega^2 R = G \frac{mM}{R^2}$$

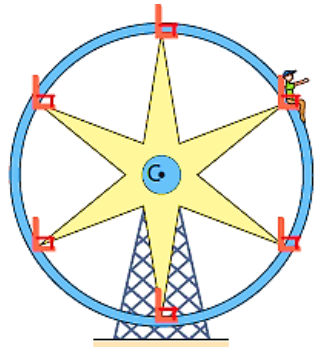
$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}.$$

(b) É independente da massa que rotacional.

## Exercício Resolvido

(UFRJ) A figura representa uma roda-gigante que gira com velocidade angular constante em torno de um eixo horizontal fixo que passa por seu centro **C**. Numa das cadeiras, há um passageiro sentado sobre uma balança de mola (dinamômetro), cuja indicação varia de acordo com a posição do passageiro. No ponto mais alto da trajetória, o dinamômetro indica 234 N e, no ponto mais baixo, indica 954 N. Calcule:

- o peso da pessoa;
- a intensidade da força resultante na pessoa.



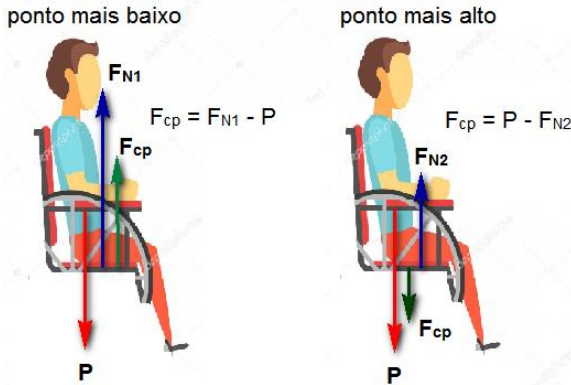
## Solução

(a) O diagrama das forças que atuam sobre o passageiro é mostrado abaixo. As forças que atuam sobre o passageiro são a força normal  $\vec{F}_N$  e a força peso  $\vec{P}$ . Sejam  $\vec{F}_{N1}$  e  $\vec{F}_{N2}$  as forças normais quando o passageiro passa pelos pontos mais baixo e mais alto da trajetória circular.

As equações para a força centrípeta, nesses pontos são, respectivamente:

$$F_{cp} = m\omega^2 r = F_{N1} - P$$

$$F_{cp} = m\omega^2 r = P - F_{N2}$$



Igualando essas equações encontramos:

$$F_{N1} - P = P - F_{N2}$$

$$2P = F_{N1} + F_{N2}$$

$$P = \frac{F_{N1} + F_{N2}}{2} = \frac{234 + 954}{2} = 594 \text{ N.}$$

(b) Devemos calcular a força centrípeta, pois ela é a força resultante quando o movimento é MCU. Usando a primeira das equações, tem-se:

$$F_{cp} = F_{N1} - P = 954 - 594 = 360 \text{ N.}$$

Como a velocidade angular  $\omega$  é constante, trata-se de um problema de dinâmica do MCU. A resultante das forças, como sabemos, é do tipo centrípeta que altera apenas a direção da velocidade  $\vec{v}$  e não a sua intensidade.

## Período e Frequência

Chamamos de período  $T$  ao menor intervalo de tempo transcorrido para que a repetição de um determinado fenômeno ocorra. Fenômenos desse tipo que se repetem em intervalos de tempos sempre iguais são denominados de fenômenos periódicos.

Se o fenômeno é periódico o período  $T$  é o tempo necessário para que tal fenômeno ocorra uma vez.

Chamamos de frequência  $f$  ao número de repetições do fenômeno na unidade de tempo.

Durante a unidade de tempo o número de repetições ocorridas mede a frequência do fenômeno.

Intervalo de Tempo	Número de repetições
$T$	1 vez
1	$f$ vezes

Desta forma vale a seguinte relação entre o Período  $T$  e a frequência  $f$ ,

$$f \cdot T = 1.$$

O produto da frequência pelo período é sempre igual a 1

No MCU, em decorrência da intensidade da velocidade  $\vec{v}$  ser sempre a mesma, o tempo de cada volta executada pela partícula é sempre o mesmo, isto é o MCU é um fenômeno periódico. O período e a frequência no MCU são facilmente encontrados, pois:

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_o = \omega t, \quad 5.18$$

é o deslocamento angular durante o intervalo de tempo  $t$ . Portanto, o intervalo de tempo para que um deslocamento angular  $\Delta\theta$  ocorra é:

$$t = \frac{\Delta\theta}{\omega}. \quad 5.19$$

Desta forma,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad 5.20$$

já que  $2\pi$  é o ângulo correspondente ao arco  $s$  de uma volta que mede  $s = 2\pi r$ .

Invertendo a equação encontramos a frequência no MCU,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad 5.21$$

## Relação entre rpm e Hertz

A unidade de medida da frequência é o inverso da unidade de medida de tempo. Se medirmos o tempo em segundos  $s$  a unidade de frequência será  $1/s$ . Caso o tempo seja medido em minutos  $min$  a unidade de frequência será  $\frac{1}{min}$ . Essas duas unidades de medida para a frequência recebem nomes especiais:

$$s^{-1} = \frac{\text{rotações}}{\text{segundo}} = \text{Hertz (Hz)}. \quad 5.22$$

$$min^{-1} = \frac{\text{rotações}}{min} = rpm. \quad 5.23$$

A correspondência entre essas unidades é dada por:

$$1 \text{ Hz} = 60 \text{ rpm}.$$

### Em resumo:

No MCU o tempo em cada volta é o período  $T$  do movimento, cujo valor é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

O número de voltas que a partícula executa por segundo é a sua frequência  $f$  medida em Hz. O número de voltas que a partícula executa por minuto é a sua frequência  $f$  medida em rpm e  $f = \frac{1}{T}$ . Sendo  $1rpm = 60 \text{ Hz}$ .

## Resumo do Capítulo

1. A força resultante que atua sobre uma partícula que executa um MCU é do tipo centrípeta.

- Aponta para o centro da trajetória curvilínea
- Não produz alteração na intensidade da velocidade vetorial da partícula, mudando apenas a sua direção.

$$F_{cp} = m \cdot a_c$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

2. O período  $T$  e a frequência  $f$  no MCU dependem da velocidade angular  $\omega$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ e } f = \frac{1}{T}$$

3. Como funções do período ou da frequência, a aceleração centrípeta e a força centrípeta assumem as formas:

$$a_{cp} = 4\pi^2 f^2 r$$

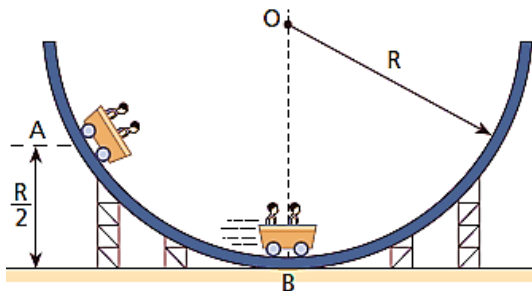
$$F_{cp} = 4\pi^2 m f^2 r$$

4. A função horária da posição angular no MCU é:

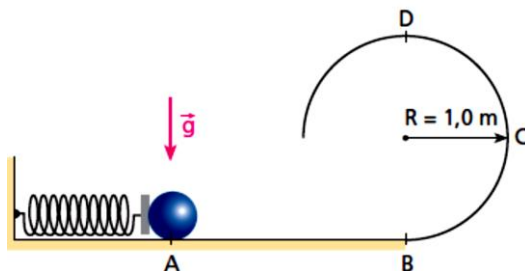
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

## Exercícios do Capítulo 5

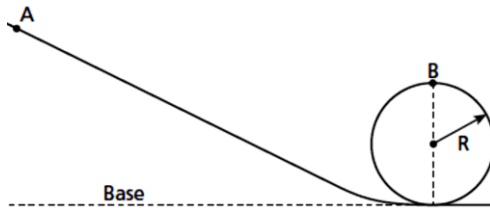
1. (UFMG) A figura mostra um trecho de uma montanha-russa de formato circular de raio  $R$ . Um carro de massa  $M = 200$  kg parte do repouso de uma altura  $R/2$  (ponto **A**). Considere o instante em que o carro passa pelo ponto mais baixo da trajetória (ponto **B**). Despreze as forças de atrito e use  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. (a) Faça uma figura representando as forças que atuam sobre o carro nesse instante;(b) Calcule a intensidade da força que a pista faz sobre ele nesse instante.



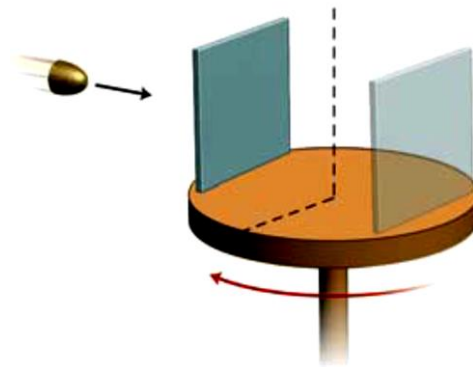
2. (UFU-MG) A mola da figura abaixo possui uma constante elástica  $K = 280$  N/m e está inicialmente comprimida de 10 cm: Uma bola com massa de 20 g encontra-se encostada na mola no instante em que esta é abandonada. Considerando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e que todas as superfícies são perfeitamente lisas, determine:(a) o valor da velocidade da bola no ponto **D**; (b) o valor da força que o trilho exerce na bola no ponto **D**;



3. (FATEC-SP) A figura representa uma pista no plano vertical, por onde uma partícula desliza sem atrito. Abandonada do repouso no ponto **A**, a partícula passa por **B**, tendo nesse ponto aceleração  $2g$  (igual ao dobro da aceleração gravitacional). Sendo  $R$  o raio da circunferência descrita, a altura de **A** em relação à base é:



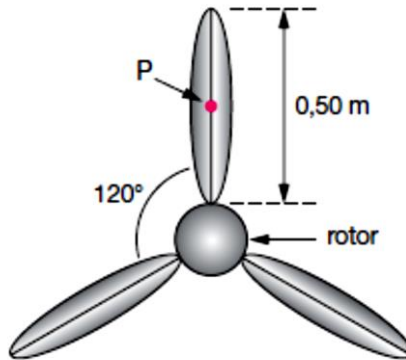
4. (FUVEST-SP) Um disco de raio  $r$  gira com velocidade angular constante. Na borda do disco, está presa uma placa fina de material facilmente perfurável. Um projétil é disparado com velocidade  $v$  em direção ao eixo do disco, conforme mostra a figura, e fura a placa no ponto A.



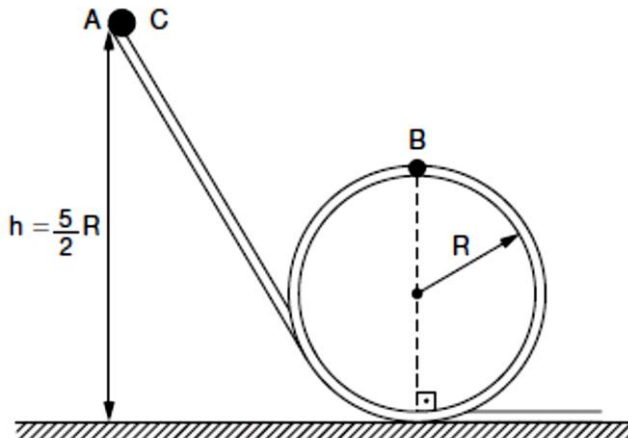
Enquanto o projétil prossegue sua trajetória sobre o disco, a placa gira meia circunferência, de forma que o projétil atravessa mais uma vez o mesmo orifício que havia perfurado. Considere a velocidade do projétil constante e sua trajetória retilínea. O módulo da velocidade  $v$  do projétil é:

5. (FUVEST-SP) Um ventilador de teto, com eixo vertical, é constituído por três pás iguais e rígidas, encaixadas em um rotor de raio  $R = 0,10$  m, formando ângulos de  $120^\circ$  entre si. Cada pá tem massa  $M = 0,20$  kg e comprimento  $L = 0,50$  m. No centro de uma das pás foi fixado um prego  $P$ , com massa  $m_p = 0,020$  kg, que desequilibra o ventilador, principalmente quando ele se movimenta. Suponha, então, o ventilador girando com uma velocidade de 60 rotações por minuto e determine:

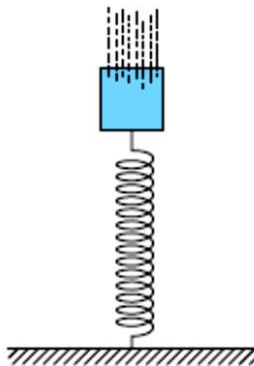
- a) A intensidade da força radial horizontal  $F$ , em newtons, exercida pelo prego sobre o rotor.
- b) A massa  $M_0$ , em kg, de um pequeno contrapeso que deve ser colocado em um ponto  $D_0$ , sobre a borda do rotor, para que a resultante das forças horizontais, agindo sobre o rotor, seja nula.
- c) A posição do ponto  $D_0$ , localizando-a no esquema da folha de respostas.



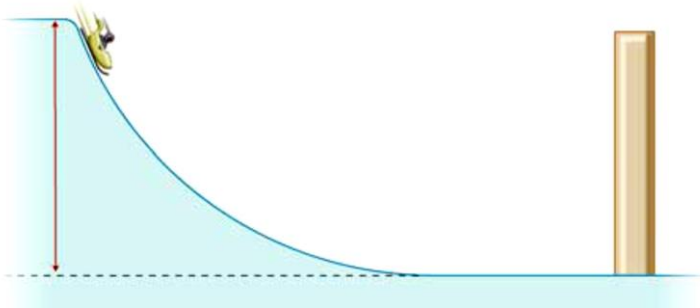
6. (MACK-SP) O corpo  $C$ , de massa  $m$ , é abandonado do repouso no ponto  $A$  do trilho liso abaixo e, após realizar o *looping* de raio  $R$ , atinge o trecho horizontal. Desprezando qualquer resistência ao deslocamento e sabendo que a aceleração gravitacional local é  $\vec{g}$ , o módulo da quantidade de movimento desse corpo, ao passar pelo ponto  $B$  do trilho, é:



7. (PUC-MG) Na figura desta questão a mola tem constante elástica  $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N/m}$  e está comprimida de  $0,20 \text{ m}$ . A única força horizontal que atua na esfera após ela ter abandonado a mola é a força de atrito cinético, que é constante e vale  $10 \text{ N}$ . A distância percorrida pela esfera, em metros, até parar, é:



8. (UFJF-MG) Um trenó, com um esquiador, começa a descer por uma rampa de gelo, partindo do repouso no ponto  $C$ , à altura de  $20 \text{ m}$ . Depois de passar pelo ponto  $A$ , atinge uma barreira de proteção em  $B$ , conforme a figura abaixo. O conjunto trenó- esquiador possui massa total de  $90 \text{ kg}$ . O trecho  $AB$  encontra-se na horizontal. Despreze as dimensões do conjunto, o atrito e a resistência do ar durante o movimento.



- Usando o princípio da conservação da energia mecânica, calcule a velocidade com que o conjunto chega ao ponto  $A$ , na base da rampa.
- Em  $B$  encontra-se uma barreira de proteção feita de material deformável, usada para parar o conjunto após a descida. Considere que, durante o choque, a barreira não se desloca e que o conjunto se choca contra ele e pára. Sabendo-se que a barreira de proteção sofreu uma deformação de  $1,5 \text{ m}$  durante o choque, calcule a força média exercida por ela sobre o conjunto.

9. (PUCCAMP-SP) Na última fila de poltronas de um ônibus, dois passageiros estão distando 2 m entre si. Se o ônibus faz uma curva fechada, de raio 40 m, com velocidade de 36 km/h, a diferença das velocidades dos passageiros é, aproximadamente, em metros por segundo,

10. (UERJ) Uma das atrações típicas do circo é o equilibrista sobre monociclo. O raio da roda do monociclo utilizado é igual a 20 cm, e o movimento do equilibrista é retilíneo. O equilibrista percorre, no início de sua apresentação, uma distância de  $24\pi$  metros.



Determine o número de pedaladas, por segundo, necessárias para que ele percorra essa distância em 30 s, considerando o movimento uniforme.

Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas:

# Dinâmica do Movimento

Circular Uniforme



Circular  
Frequência  
Movimento  
Posição  
Cinética

Centrípeta  
Angular  
Força  
Período  
Dinâmica

Helicoidal  
Energia  
Aceleração  
Uniforme

# Cap. 6

## Estudo Gráfico dos Movimentos



Representação gráfica dos batimentos cardíacos de uma pessoa.

### Introdução

Desejamos firmar nossos conhecimentos sobre os movimentos das partículas. Para isto um enfoque através dos gráficos será usado para descrevermos o M.R.U, o M.R.U.V e o M.C.U. Várias propriedades importantes dos gráficos irão nos auxiliar nessa jornada.

## Função

Dados dois conjuntos **A** e **B**, quaisquer, se fizermos uma correspondência entre os elementos dos dois conjuntos tal que:

Todo elemento de A está ligado a algum elemento de B.

Todo elemento de A está ligado a *somente um* elemento de B.

Tal correspondência biunívoca é chamada de função de A em B, que simbolicamente indicamos por:

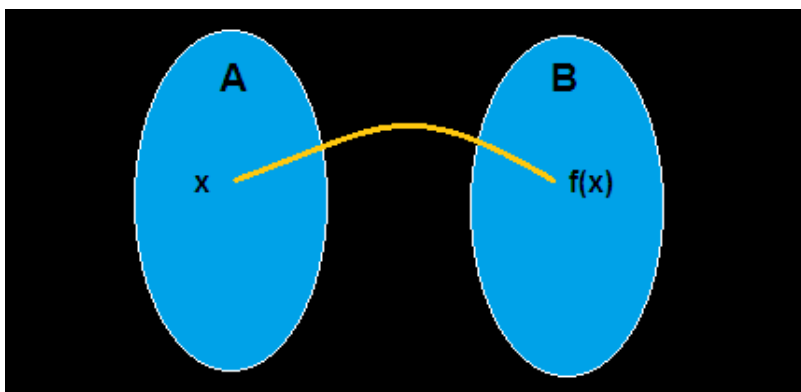


Figura 6. 1 - Função de A em B.

## Função do Primeiro Grau

Definimos a função  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  do primeiro grau à função definida pela regra  $f(x) = A x + B$ , onde A e B são números reais. A variável x é chamada de variável independente e a variável  $y = f(x)$  é chamada de variável dependente.

O gráfico dessa função é uma reta, que faz um certo ângulo com o eixo x. A tangente desse ângulo está associada ao número real A, que por isso recebe o nome de coeficiente angular:

$$A = \operatorname{tg} \theta \quad 6.1$$

O coeficiente B é encontrado fazendo  $x = 0$ . Isto é,  $f(0) = A \cdot 0 + B = B$ , que é a ordenada onde a reta corta o eixo dos y, chamado de coeficiente linear.

## Função do 1º Grau Crescente e Decrescente

Como você viu nos seus estudos de matemática o sinal de  $A$  define se a função é crescente ou decrescente. Se  $A > 0$  a função é crescente e se  $A < 0$  a função é decrescente.

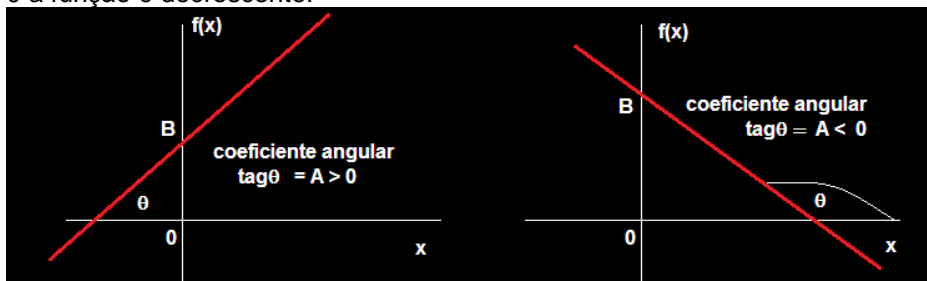


Figura 6. 2 - Representação gráfica da função crescente e função decrescente.

O gráfico à esquerda é de uma função crescente, pois, ao aumentarmos os valores de  $x$  os correspondentes valores de  $y$  aumentam. Para a função decrescente ao aumentarmos os valores de  $x$  os correspondentes valores de  $y$  diminuem. Isto está representado pelo gráfico à direita.

## Construção do Gráfico da Função do 1º Grau

Da geometria elementar sabemos que dois pontos determinam uma reta e que cada ponto corresponde a um par ordenado de números reais  $(x, y)$ . No caso de funções cada ponto de seu gráfico é determinado pelo par  $(x, f(x))$ . O valor de  $x$  é arbitrariamente escolhido e o valor de  $y$  é determinado pelo  $x$  escolhido. Portanto, basta escolher dois valores para  $x$  e calcularmos pela função os correspondentes valores para  $y$ .

### Exemplo

Faça o gráfico da função do 1º grau  $f(x) = 2x + 1$ . Vamos escolher para  $x$  os valores 0 e 1. Então:

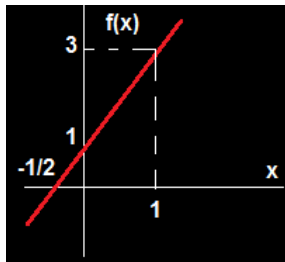
$$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

e

$$f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$x$	$f(x)$	$(x, f(x))$
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)

Marcamos esses pontos no gráfico e traçamos a reta.



Observe que no gráfico também marcamos o par ordenado  $(-1/2, 0)$  que é o ponto sobre o eixo  $x$  interceptado pela reta. É muito conveniente que saibamos onde a reta intercepta os eixos coordenadas, pois isto nos dará informações relevantes no estudo dos gráficos dos movimentos na Física.

## Função Constante

Definimos função constante à função definida pela regra:

$$f(x) = B, \quad 6.2$$

onde  $B$  é um número real independente de  $x$ . Todo elemento  $x$  está ligado com o mesmo elemento  $B$ .

O gráfico dessa função é uma reta paralela ao eixo dos  $x$ . Acima do eixo  $x$  para  $B > 0$  e abaixo do eixo  $x$  para  $B < 0$  conforme Figura 6.3.

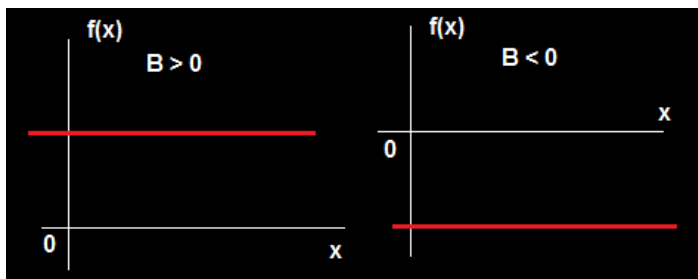


Figura 6.3 - Representação gráfica da função constante.

## Função do Segundo Grau

Neste caso a função  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  do segundo grau (ou função quadrática) é definida pela regra  $f(x) = A x^2 + B x + C$ , onde A, B e C são números reais. O gráfico desta função é uma parábola com concavidade voltada para cima ( $A > 0$ ) ou para baixo ( $A < 0$ ).

Para construirmos esse gráfico seguimos os seguintes quatro passos:

1. Interseção da parábola com o eixo y: Fazemos  $x = 0$ .

$$f(0) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \quad 6.3$$

Encontramos o par ordenado  $(0 ; C)$ .

2. Interseção da parábola com o eixo x: Fazemos  $y = 0$ .

$$0 = Ax^2 + Bx + C \quad 6.4$$

Resolvemos a equação do 2º pela fórmula de Bháskara:

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}, \quad 6.5$$

E encontramos os valores  $x_1$  e  $x_2$ . Com eles marcamos os pontos  $(x_1, 0)$  e  $(x_2, 0)$ .

3. Determinação do vértice da parábola V  $(x_V ; y_V)$

$$x_V = \frac{-B}{2A} \text{ e } y_V = \frac{-\Delta}{4A} \quad 6.6$$

4. Concavidade da parábola:  $A > 0$  concavidade para cima,  $A < 0$  concavidade para baixo. Marcamos esses pontos e construímos a parábola.

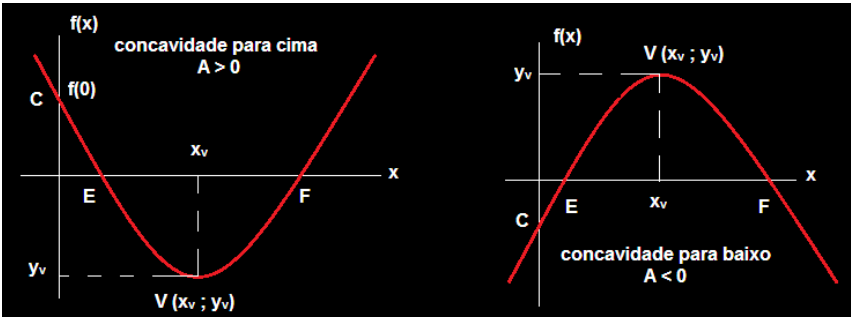


Figura 6. 4 - Representação gráfica da função do segundo grau.

## Gráficos do M.R.U.

No M.R.U. temos a função do *primeiro grau* entre o espaço  $x$  e o tempo  $t$ , dada pela regra:

$$x(t) = x_0 + vt \quad 6.7$$

Aqui,  $t$  é a variável independente e  $x$  é a variável dependente. Comparando com função  $y = Ax + B = B + Ax$ , vemos que:

- O espaço inicial é o coeficiente linear  $x_0 = B$
- A velocidade é o coeficiente angular  $v = A$

Desta forma:

Para  $v > 0$  a função crescente. Os espaços crescem no decorrer do tempo (movimento progressivo)

Para  $v < 0$  a função é decrescente. Os espaços decrescem no decorrer do tempo (movimento retrógrado)

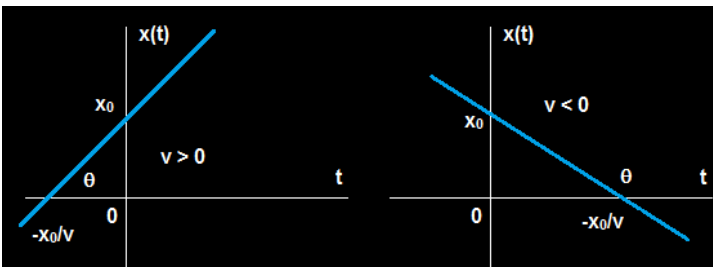


Figura 6. 5 - Representação gráfica do movimento progressivo e do movimento retrógrado.

### Propriedade da Inclinação 1

“Em todo gráfico da **posição versus tempo** o coeficiente angular da reta (tangente do ângulo  $\theta$ ) é numericamente igual a velocidade da partícula”.

$$\tan\theta \stackrel{N}{=} v \quad 6.8$$

A velocidade no M.R.U é constante e seus gráficos em função do tempo são da forma:

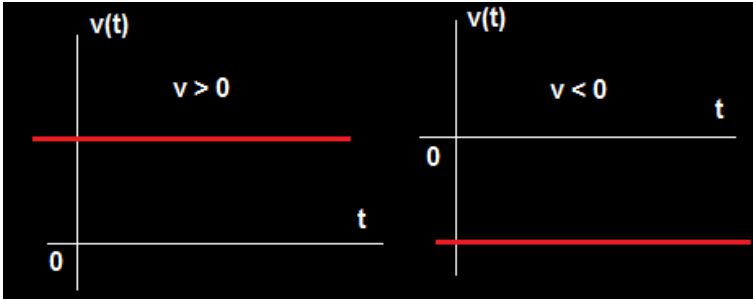


Figura 6. 6 - O gráfico da aceleração neste movimento também é o gráfico da função constante:  $a = 0$ .

### Exercício Resolvido

Uma partícula se movimenta ao longo de uma trajetória retilínea segundo a função horária:

$$x = -5 + 2t, \quad 6.9$$

onde  $x$  é a posição em metros e  $t$  é o tempo em segundos.

Construa os gráficos do espaço  $x$  como função do tempo  $t$  e da velocidade  $v$  em função do tempo  $t$ . Em que instante a partícula passa pela origem dos espaços? Localize esses pontos no gráfico.

### Solução

Precisamos marcar dois pares ordenados  $(t, x(t))$  para desenharmos a reta. É muito conveniente que indiquemos onde a reta corta os eixos coordenados. Para encontrarmos onde corta o eixo  $t$ ,  $x$  é zero:

$$\begin{aligned} 0 &= -5 + 2t, \\ t &= 2,5 \text{ s} \end{aligned}$$

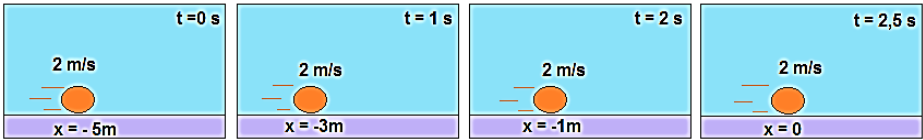
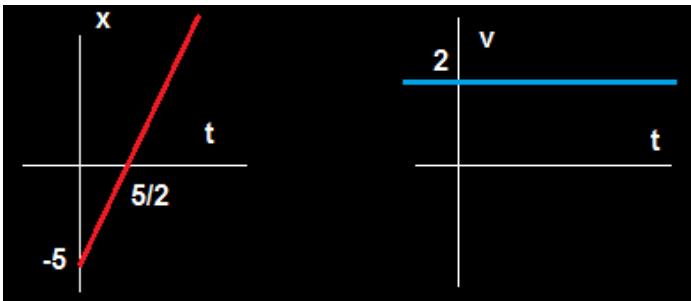
O par correspondente é  $(2,5 ; 0)$ .

Para encontrarmos onde corta o eixo x, t é zero.

$$x = -5 = 2.0 = -5 \text{ m}$$

O par correspondente é (0; -5).

t(s)	x(m)	(t ; x)
0	-5	(0 ; -5)
2,5	0	(2,5 ; 0)



## Exercício Resolvido

Duas partículas A e B se movimentam sobre uma mesma trajetória retilínea. Os módulos das suas velocidades são  $v_A = 5 \text{ m/s}$  e  $v_B = 2 \text{ m/s}$ . No instante  $t = 0 \text{ s}$  A se encontra em  $x = -3 \text{ m}$  e B se encontra em  $x = 12 \text{ m}$ . Faça num mesmo diagrama os gráficos das posições de A e B em função do tempo, mostrando suas posições iniciais, a posição e o tempo do encontro. (a) Supondo que se movem no mesmo sentido; (b) Supondo que se movem em sentidos contrários.

## Solução

Vamos montar em cada caso as equações e calcular o instante e a posição de encontro das partículas.

$$(a) \quad x_A = -3 + 5t; \quad x_B = 12 + 2t \quad (x \rightarrow m, t \rightarrow s).$$

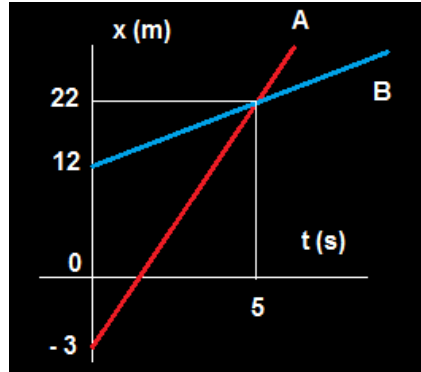
$$-3 + 5t = 12 + 2t,$$

$$t = 5s,$$

é o tempo de encontro. E,

$$x_B = 12 + 2 \cdot 5 = 22 \text{ m},$$

é a posição de encontro.



(b) Supondo A se movendo progressivo e B em sentido contrário as funções horárias da posição são:

$$x_A = -3 + 5t; \quad x_B = 12 - 2t$$

$$-3 + 5t = 12 - 2t,$$

$$t = \frac{15}{7} \text{ s},$$

é o tempo de encontro e,

$$x = 7,71 \text{ m}$$

é a posição de encontro.

## Gráficos do M.R.U.V.

No M.R.U.V. temos três tipos de gráficos em relação à variável tempo: o espaço como função do tempo, dado pela função do segundo grau,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2, \quad 6.10$$

o gráfico da velocidade escalar como função do tempo, dado pela função do primeiro grau,

$$v = v_0 + at, \quad 6.11$$

e da aceleração escalar que neste caso é constante para todos os tempos.

## Gráfico da Aceleração Escalar

Comecemos nosso estudo dos gráficos do M.R.U.V. pelo gráfico mais simples dentre eles: o da aceleração escalar como função do tempo. Se:

- Aceleração escalar for positiva → gráfico acima do eixo do tempo
- Aceleração escalar for negativa → gráfico abaixo do eixo do tempo

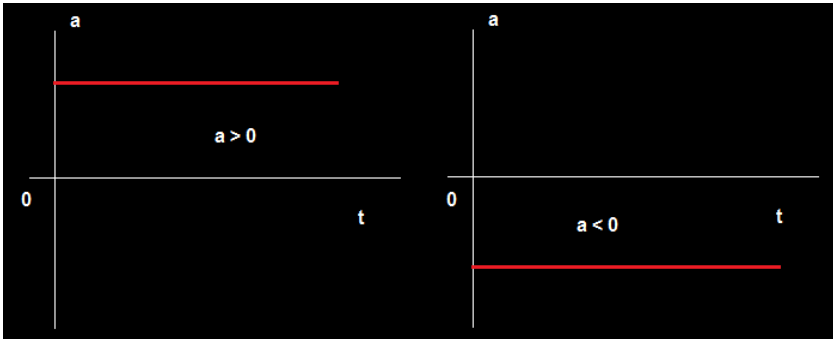
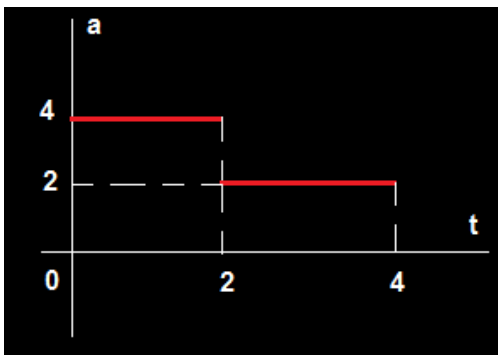


Figura 6. 7 - Gráfico da aceleração escalar.

Observe que os gráficos da Figura 6.7 nos informam que a aceleração possui um único valor, positivo ou negativo, para todos os instantes de tempo  $t \geq 0$ . Neste caso o objeto se move com uma única aceleração. Esses gráficos são completamente análogos ao M.R.U. onde a *velocidade* é constante (compare).

Outros casos de interesse também podem aparecer onde a aceleração é *constante em intervalos*, como por exemplo, como mostra a Figura 6.8:



$$a = \begin{cases} 4,0 & \text{para } 0 \leq t < 2 \\ 2,0 & \text{para } 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

Figura 6. 8 – Gráfico da aceleração constante.

## Exercício Resolvido

Considere o gráfico da aceleração de um móvel em função do tempo como mostrado acima. Seja  $t$  o tempo em segundos e  $a$  a aceleração em metros por segundo ao quadrado. Sabe-se que no instante  $t = 0$  a velocidade do móvel é de 2 m/s. Qual a velocidade do móvel no instante 4 s?

## Solução

No intervalo de tempo 0 e 2 s, o móvel possui aceleração  $4 \text{ m/s}^2$  e no intervalo de tempo 2 s a 4 s,  $2 \text{ m/s}^2$ . Determinamos diretamente a velocidade usando a função do M.R.U.V.

$$v = v_0 + a \cdot t$$

No primeiro intervalo de tempo  $0 \leq t < 2\text{s}$ , temos a seguinte função velocidade:

$$v(t) = 2 + 4t.$$

Já no segundo intervalo de tempo  $2\text{s} < t \leq 4\text{s}$  a função será:

$$v(t) = v(t = 2) + 2(t - 2).$$

Repare que a velocidade inicial para o segundo intervalo é a velocidade final no primeiro intervalo  $v(t = 2)$ .

Para  $t = 2$  s, a primeira função nos dá:

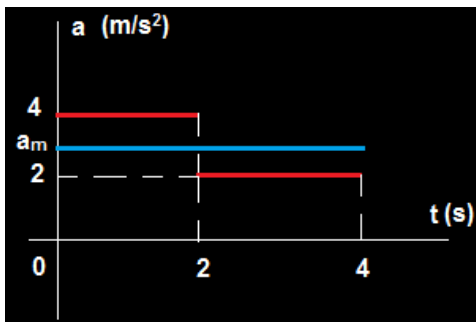
$$v(2) = 2 + 4 \cdot 2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Substituindo este valor na segunda função encontramos o resultado desejado:

$$v(4) = 10 + 2(4 - 2) = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Poderíamos ter resolvido esse problema com o auxílio da aceleração escalar média  $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ . Ela é definida como a aceleração constante que produz a mesma variação de velocidade no mesmo intervalo de tempo que a aceleração variável. Veja o gráfico abaixo.

Seguindo este caminho, precisamos determinar a aceleração escalar média. Vamos calcular as variações de velocidade sofridas pelo móvel em cada intervalo de tempo. No intervalo  $0 \leq t < 2s$  temos o seguinte  $\Delta v$ .



$$\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1 = 4 \cdot (2 - 0) = 8 \frac{m}{s}$$

No intervalo  $2 < t \leq 4s$  teremos:

$$\Delta v_2 = a_2 \Delta t_2 = 2 \cdot (4 - 2) = 4 \frac{m}{s}$$

Desta forma a variação total de velocidade tem o valor:

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 12 \frac{m}{s}$$

Substituindo esses resultados determinamos a aceleração média, que corresponde a linha azul do gráfico:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12}{4} = 3 \frac{m}{s}$$

Agora fazemos,

$$v(t) = v_0 + a_m t,$$

$$v(4) = 2 + 3 \cdot 4 = 14 \frac{m}{s}$$

## Propriedade no Gráfico da Aceleração

Vamos aproveitar o exercício resolvido acima para introduzir uma propriedade no gráfico da aceleração muito útil na resolução de problemas em cinemática. Observe que  $\Delta v_1 = a_1 \Delta t_1$  e  $\Delta v_2 = a_2 \Delta t_2$  podem ser interpretados como as áreas dos retângulos onde as bases são os intervalos de tempo e as alturas os valores das acelerações. Embora este caso seja para a aceleração constante, a validade do que vamos enunciar a seguir é geral:

### Propriedade Gráfica da Área 1

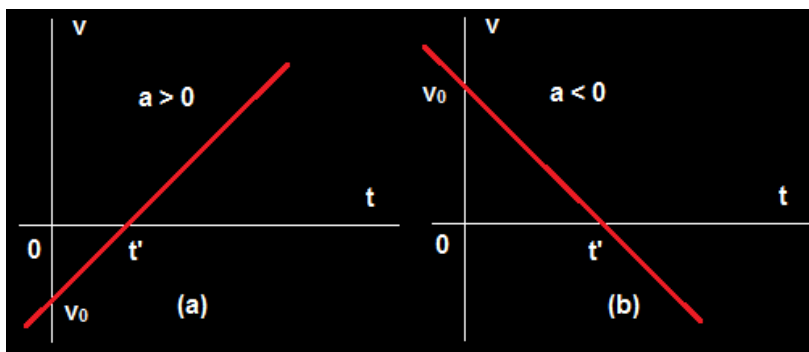
“Em todo gráfico da **aceleração versus tempo** a área da figura é numericamente igual a variação de velocidade”.

$$A \stackrel{N}{\hat{=}} \Delta v$$

6.12

### Gráfico da Velocidade Escalar

Esses gráficos são análogos aos gráficos da posição versus tempo no M.R.U. (compare). A função é crescente quando  $a > 0$  e decrescente quando  $a < 0$ . É importante não confundir o fato de a função velocidade ser crescente (ou decrescente) com o movimento ser acelerado ou retardado. Mesmo que o gráfico seja crescente o movimento pode ser acelerado ou retardado. No gráfico (a) acima a função é crescente e o movimento é *acelerado para  $t > t'$  e retardado para  $t < t'$* . No gráfico (b) a situação se inverte. A função é decrescente com o movimento *é acelerado para  $t < t'$  e retardado para  $t > t'$*



**Figura 6. 9** - Representação gráfica do (a) movimento acelerado e do (b) movimento retardado.

Lembre-se ainda que na função  $v = v_0 + at$  a aceleração é o coeficiente angular. Isto é enunciado em forma de propriedade:

### Propriedade da Inclinação 2

“Em todo gráfico da **velocidade versus tempo** o coeficiente angular da reta (tangente do ângulo  $\theta$ ) é numericamente igual a aceleração da partícula”.

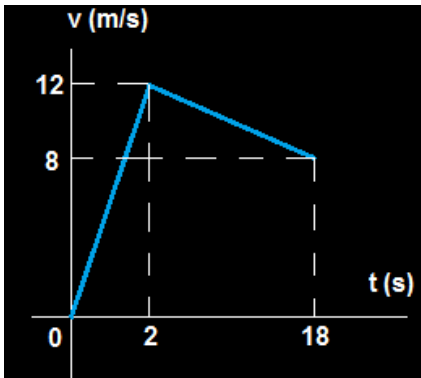
$$\tan\theta \stackrel{N}{\cong} a$$

6.13

Da mesma forma que para o caso da aceleração também podemos ter o gráfico da função velocidade definido em intervalos. Veja o exemplo a seguir.

### Exercício Resolvido

(UFRJ) Nas provas de atletismo de curta distância (até 200 m) observa-se um aumento muito rápido da velocidade nos primeiros segundos da prova, e depois um intervalo de tempo relativamente longo, em que a velocidade do atleta permanece praticamente constante, para em seguida diminuir lentamente. Para simplificar a discussão, suponha que a velocidade do velocista em função do tempo seja dada pelo gráfico a seguir:



Calcule: (a) as acelerações nos dois primeiros segundos da prova e no movimento subsequente. (b) a velocidade média nos primeiros 18 s de prova.

### Solução

(a) A velocidade como função do tempo é definida em intervalos:

$$v(t) = \begin{cases} 6t & \text{para } 0 \leq t < 2 \text{ s} \\ 12 - \frac{(t-2)}{4} & \text{para } 2 < t \leq 18 \text{ s.} \end{cases}$$

Isto é verdadeiro, pois, determinando a aceleração no intervalo 0 a 2 s, encontramos:

$$t = 0 \rightarrow v = 0 \\ a = \Delta v / \Delta t = 12/2 = 6 \text{ m/s}^2$$

e a função velocidade nesse intervalo é:

$$v = 6t$$

Determinando a aceleração no intervalo 2 s a 18 s:

$$t = 2 \text{ s} \rightarrow v = 12 \text{ m/s}$$

$$t = 18 \text{ s} \rightarrow v = 8 \text{ m/s} \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ m/s}^2.$$

O que corresponde a seguinte função horária:

$$v(t) = 12 - \frac{(t - 2)}{4} \text{ para } 2 < t \leq 18 \text{ s}.$$

(b) Como em cada um dos intervalos a aceleração é constante, esse problema trata de dois M.R.U.V. O primeiro com aceleração  $6 \text{ m/s}^2$  e o segundo com aceleração igual a  $-\frac{1}{4} \text{ m/s}^2$ . Vamos usar a expressão da velocidade média para esse movimento para encontrar uma importante propriedade nos gráficos da velocidade como função do tempo.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

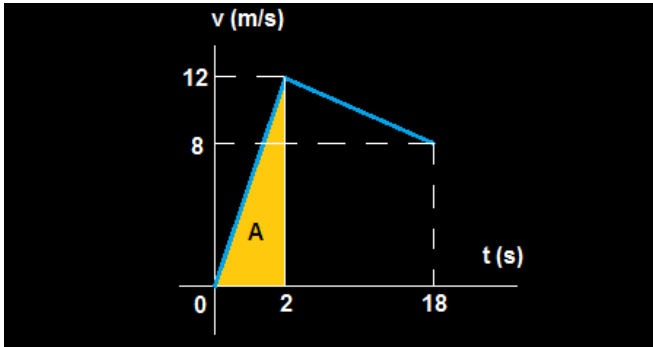
Com uso desta expressão escrevemos:  $\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \Delta t$ .

No intervalo  $0 \leq t < 2 \text{ s}$  teremos:

$$\Delta x_1 = \frac{0 + 12}{2} \cdot (2 - 0) = \frac{12}{2} \cdot 2,$$

que corresponde a área do triângulo de base 2 e altura 12.

$$\Delta x_1 = \text{Área do triângulo} = 12 \text{ m}.$$



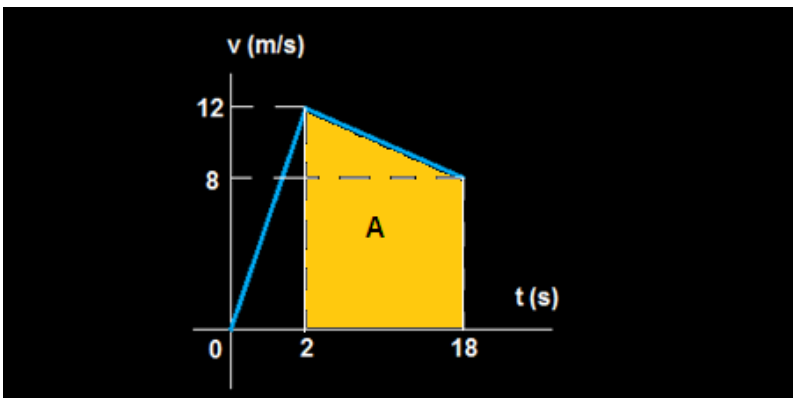
No intervalo  $2 < t \leq 18$  s teremos:

$$\Delta x_2 = \frac{8 + 12}{2} \cdot (18 - 2) = 160 \text{ m},$$

que é a área do trapézio:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{b + B}{2} \cdot h,$$

onde a base menor  $b$  vale 8, a base maior  $B$  vale 12 e a altura vale  $h = 18 - 2$ .



Assim a velocidade escalar média, desde 0 até 18 s vale:

$$v_m = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = \frac{\text{Área total}}{\Delta t} = \frac{12 + 160}{18} = 9,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

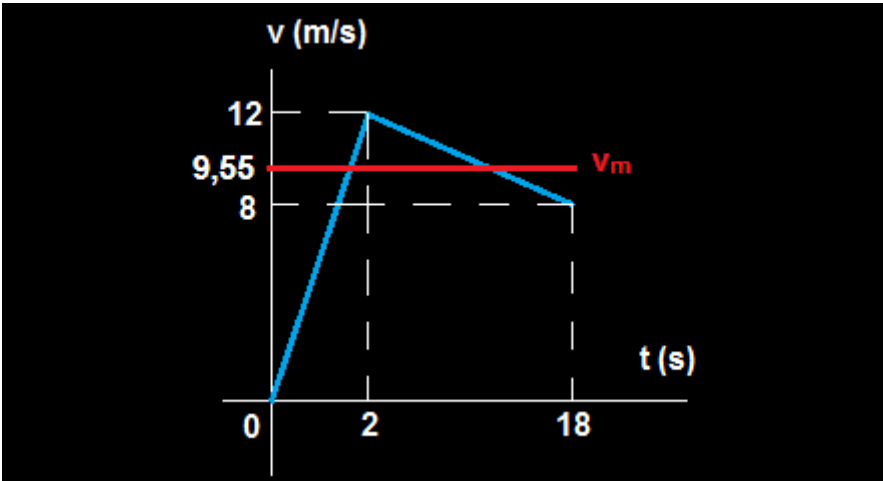
### Propriedade Gráfica da Área 2

“Em todo gráfico da **velocidade versus tempo** a área da figura é numericamente igual a variação de espaço”

$$A \stackrel{N}{\cong} \Delta x$$

6.14

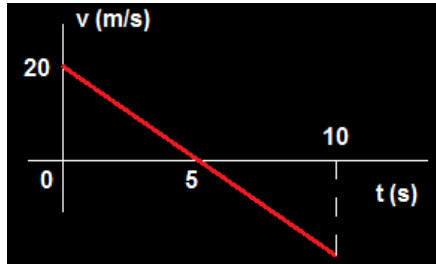
A linha vermelha na Figura 6.10 mostra a velocidade média no exemplo acima. Ela é a velocidade constante que, no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$  produz o mesmo deslocamento escalar  $\Delta x$  produzido quando o movimento se processa com velocidade variável. A área abaixo da linha vermelha é igual a área abaixo da linha azul.



**Figura 6. 10** - A linha vermelha no gráfico mostra a velocidade média no exemplo acima. A linha vermelha mostra a velocidade.

## Exercício Resolvido

(EFEI-MG) A velocidade de um projétil lançado verticalmente para cima varia de acordo com o gráfico da figura. Determine a altura máxima atingida pelo projétil, considerando que esse lançamento se dá em um local onde o campo gravitacional é diferente do da Terra.



## Solução

A altura máxima ocorre quando  $t = 5$  s, instante em que  $v = 0$ . Essa altura é dada pela área do triângulo de base 5 e altura 20:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50 \text{ m}$$

## Gráfico da Posição Escalar

A função horária da posição no M.R.U.V é do segundo grau na variável  $t$ ,

$$x = x_0 + v_0 t + a \frac{t^2}{2}.$$

Os diagramas para aceleração positiva ( $a > 0$ ) e negativa ( $a < 0$ ), correspondem respectivamente as concavidades para cima e para baixo.

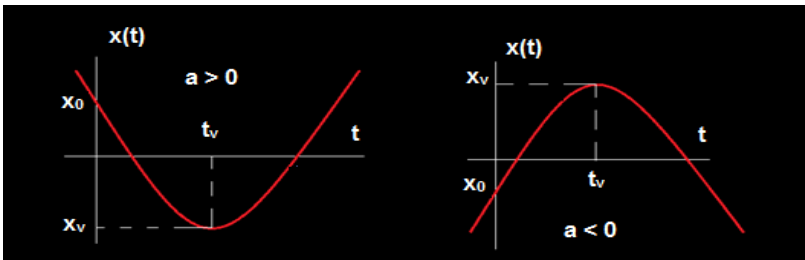


Figura 6. 11 - Os diagramas para aceleração positiva ( $a > 0$ ) e negativa ( $a < 0$ )

## Resumo do Capítulo

1. No M.R.U. temos a função do *primeiro grau* entre o espaço  $x$  e o tempo  $t$ , dada pela regra:  $x(t) = x_0 + vt$

“Em todo gráfico da **posição versus tempo** o coeficiente angular da reta (tangente do ângulo  $\theta$ ) é numericamente igual a velocidade da partícula”.

$$\tan\theta \stackrel{N}{\cong} v$$

2. No M.R.U.V. temos três tipos de gráficos em relação a variável tempo: o espaço como função do tempo, dado pela função do segundo grau,

$$x = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2,$$

o gráfico da velocidade escalar como função do tempo, dado pela função do primeiro grau,  $v = v_0 + at$ , e da aceleração escalar que neste caso é constante para todos os tempos.

“Em todo gráfico da **aceleração versus tempo** a área da figura é numericamente igual a variação de velocidade”.

$$A \stackrel{N}{\cong} \Delta v$$

“Em todo gráfico da **velocidade versus tempo** o coeficiente angular da reta (tangente do ângulo  $\theta$ ) é numericamente igual a aceleração da partícula”.

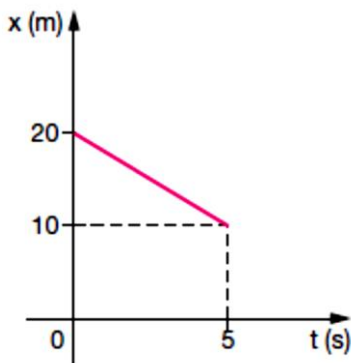
$$\tan\theta \stackrel{N}{\cong} a$$

“Em todo gráfico da **velocidade versus tempo** a área da figura é numericamente igual a variação de espaço”.

$$A \stackrel{N}{\cong} \Delta x$$

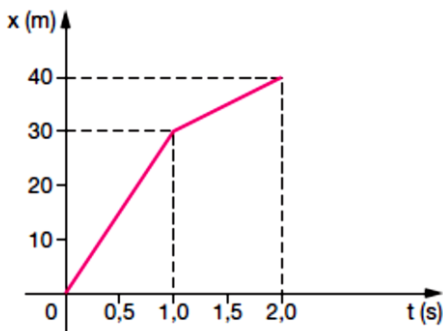
## Exercícios do Capítulo 6

1. (UNIFOR-CE) Um móvel se desloca, em movimento uniforme, sobre o eixo  $x$  durante o intervalo de tempo de  $t_0 = 0$  a  $t = 30$  s. O gráfico representa a posição  $x$ , em função do tempo  $t$ , para o intervalo de  $t = 0$  a  $t = 5,0$  s. Calcule o instante em que a posição do móvel é  $-30$  m.

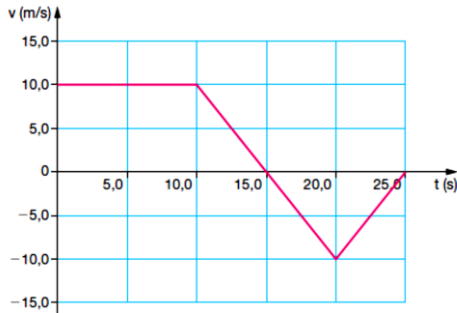


2. (VUNESP-SP) O movimento de um corpo ocorre sobre um eixo  $x$ , de acordo com o gráfico, em que as distâncias são dadas em metros e o tempo, em segundos. A partir do gráfico, determine:

- a distância percorrida em 1 segundo entre o instante  $t_1 = 0,5$  s e  $t_2 = 1,5$  s;
- a velocidade média do corpo entre  $t_1 = 0,0$  s e  $t_2 = 2,0$  s;
- a velocidade instantânea em  $t = 2,0$  s.

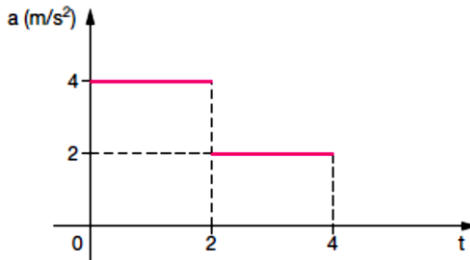


3. (UFPE) O gráfico mostra a variação da velocidade de um automóvel em função do tempo. Supondo-se que o automóvel passe pela origem em  $t = 0$ , calcule o deslocamento total, em metros, depois de transcorridos 25 segundos.

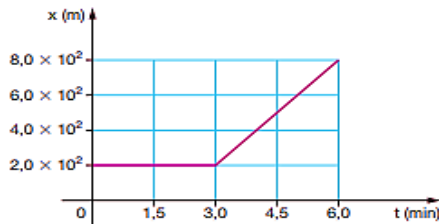


4. O gráfico representa a aceleração de um móvel em função do tempo. A velocidade inicial do móvel é de 2 m/s.

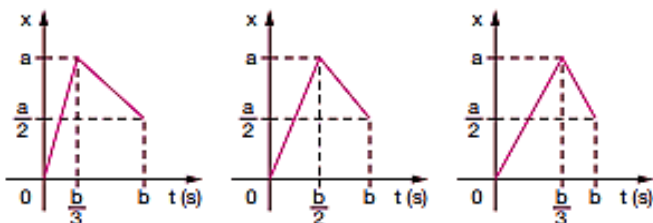
- a) Qual a velocidade do móvel no instante 4 s?  
 b) Construa o gráfico da velocidade do móvel em função do tempo nos 4 s iniciais do movimento.



5. (UFPE) O gráfico representa a posição de uma partícula em função do tempo. Qual a velocidade média da partícula, em metros por segundo, entre os instantes  $t = 2,0$  min e  $t = 6,0$  min?

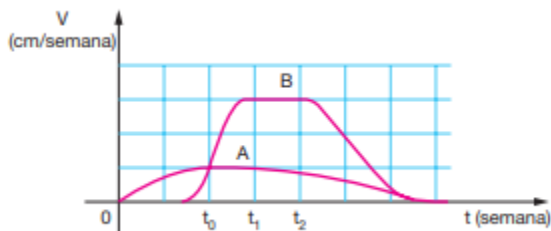


6. (FUVEST-SP) Os gráficos referem-se a movimentos unidimensionais de um corpo em três situações diversas, representando a posição como função do tempo. Nas três situações, são iguais:



- as velocidades médias.
- as velocidades máximas.
- as velocidades iniciais.
- as velocidades finais.
- os valores absolutos das velocidades máximas.

7. (FUVEST-SP) As velocidades de crescimento vertical de duas plantas, A e B, de espécies diferentes, variaram, em função do tempo decorrido após o plantio de suas sementes, como mostra o gráfico.



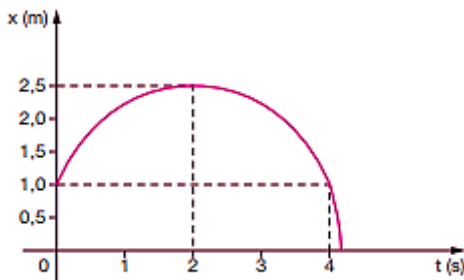
É possível afirmar que:

- A atinge uma altura final maior do que B
- B atinge uma altura final maior do que A
- A e B atingem a mesma altura final
- A e B atingem a mesma altura no instante  $t_0$
- A e B mantêm altura constante entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ .

8. (ACAFE-SC) O gráfico representa a variação da posição, em função do tempo, de um ponto material que se encontra em movimento retilíneo uniformemente variado.

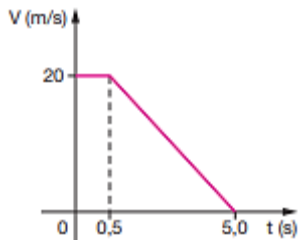
Analisando o gráfico, podemos afirmar que:

- A velocidade inicial é negativa.
- A aceleração do ponto material é positiva.
- O ponto material parte da origem das posições.
- No instante 2 segundos, a velocidade do ponto material é nula.
- No instante 4 segundos, o movimento do ponto material é progressivo.

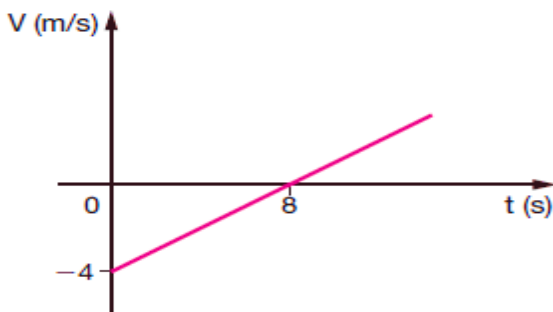


9. (UEPA) Um motorista, a 50 m de um semáforo, percebe a luz mudar de verde para amarelo. O gráfico mostra a variação da velocidade do carro em função do tempo a partir desse instante. Com base nos dados indicados no gráfico pode-se afirmar que o motorista para:

- 5 m depois do semáforo
- 10 m antes do semáforo
- exatamente sob o semáforo
- 5 m antes do semáforo
- 10 m depois do semáforo



10. (UEL-PR) O gráfico representa a velocidade escalar de um corpo, em função do tempo. De acordo com o gráfico, o módulo da aceleração desse corpo, em metros por segundo ao quadrado, é igual a:



Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas:

# Estudo Gráfico dos Movimentos



Função do 1º grau

Função

Propriedades

Função do 2º grau

Gráfico

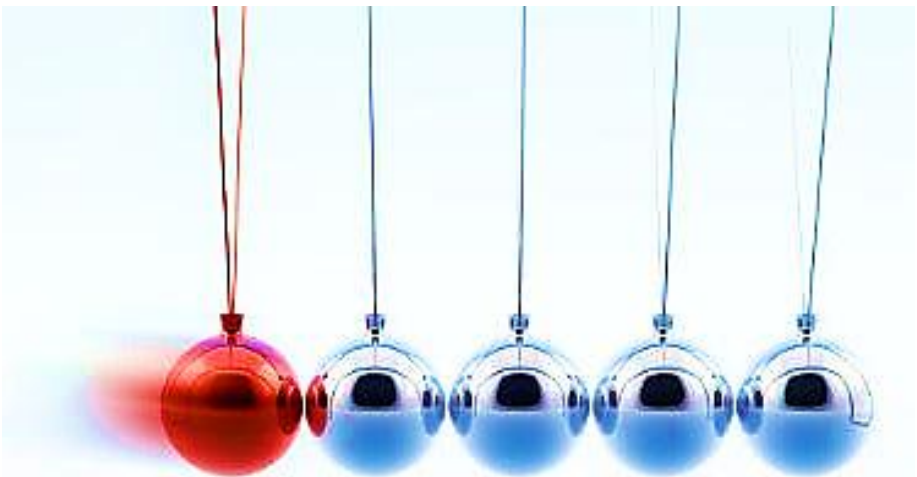
Crescente

Constante

Decrescente

# Cap. 7

## A Conservação do Momento Linear



Representação da conservação do momento linear.

### Introdução

Já consideramos o efeito de uma força focando a nossa atenção no deslocamento por ela produzido enquanto atua sobre um corpo, concretamente no produto  $F\Delta x$ , o que denominamos de trabalho da força. Para a força resultante, observamos naquela oportunidade que esse produto corresponde a variação de uma grandeza chamada de energia cinética:

$$W_{FR} = \Delta K.$$

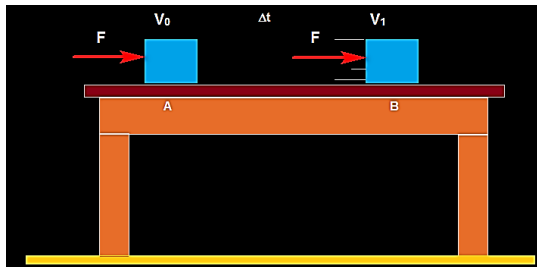
7.1

Esse importante resultado foi chamado de *Teorema da Energia Cinética (T.E.C.)*.

Neste capítulo vamos considerar o efeito da força focando atenção no intervalo de tempo  $\Delta t$  durante o qual atua sobre o corpo. Mais concretamente, queremos estudar o produto *força x tempo*. Somos levados a esse tipo de raciocínio pelo fato de que, quando queremos puxar ou empurrar objetos exercemos forças sobre eles e como efeito uma variação de velocidade aparece. Para o caso da força resultante veremos que seu impulso será igual à variação de uma grandeza vetorial, chamada de momento linear ou quantidade de movimento. Esse será o Teorema do Impulso. Na sequência um importante resultado será alcançado que é considerado um dos pilares da Mecânica: O Princípio da Conservação do Momento Linear.

## Impulso de uma força constante

Vamos considerar o seguinte problema: Um bloco de massa  $m$  que se movia com velocidade  $\vec{V}_0$  é empurrado sobre uma mesa lisa pela ação de uma força  $\vec{F}$  constante em intensidade direção e sentido como mostra a figura. Se a força dura um intervalo de tempo  $\Delta t$ , qual a variação de velocidade  $\Delta \vec{V}$  sofrida pelo bloco após ter transcorrido um intervalo de tempo?



**Figura 7. 1** - Bloco de massa  $m$  que se move com velocidade  $\vec{V}_0$  é empurrado sobre uma mesa lisa pela ação de uma força constante  $\vec{F}$  em intensidade direção e sentido.

Vamos novamente buscar o auxílio do T.E.C. Como  $\vec{F}$  é paralela à velocidade do bloco e percebendo que esta força é a resultante, visto que  $\vec{P}$  e  $\vec{N}$  se anulam e não há atritos, teremos:

$$F_R \Delta x_{AB} = \frac{m}{2} (V^2 - V_0^2). \quad 7.2$$

Lembrando a relação da matemática elementar,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

A expressão anterior fica escrita na forma:

$$F \Delta x_{AB} = \frac{m}{2} (V + V_0)(V - V_0),$$

$$F \Delta x_{AB} = m \frac{(V + V_0)}{2} \Delta V. \quad 7.3$$

Mas,

$$v_m = \frac{(V + V_0)}{2} = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t}, \quad 7.4$$

é a velocidade média do bloco.

Com isso determinamos a intensidade da variação de velocidade  $\Delta V$ :

$$F \Delta x_{AB} = m \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t} \Delta V,$$

$$F \Delta t = m \Delta V. \quad 7.5$$

Vetorialmente escrevemos:

$$\vec{F} \Delta t = m \overline{\Delta \vec{V}}. \quad 7.6$$

$$F \cdot \Delta t = m (v - v_0) \quad 7.8$$

Chamamos de impulso  $\vec{I}$  da *força constante* qualquer ao produto  $\vec{F} \Delta t$ , cujas características são:

**Direção:** a direção de  $\vec{I}$  é sempre a mesma direção de  $\vec{F}$ .

**Sentido:** o sentido de  $\vec{I}$  é sempre o mesmo sentido de  $\vec{F}$ .

**Intensidade:** a intensidade de  $\vec{I}$  é o produto da intensidade da força sobre partícula pelo intervalo de tempo  $\Delta t$ .

$$\vec{I} = F \cdot \Delta t \qquad 7.9$$

Observe a diferença da definição de trabalho que é uma grandeza escalar, e o impulso de uma força que é uma grandeza vetorial.

A unidade do impulso no sistema internacional de unidades é o **Newton x segundo = N.s**

A expressão  $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$  só é expressamente verdadeira quando  $\vec{F}$  é constante durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Se  $\vec{F}$  é constante apenas em direção, mas varia em intensidade ou em sentido, devemos substituir  $F$  pelo seu valor médio  $\bar{F}$ . Nestes casos, a intensidade do impulso da força é determinada construindo-se o gráfico da intensidade variável da força em função do intervalo de tempo no qual a força atua e calculando-se a sua área. Aliás, o cálculo do impulso pela área é geral, valendo quando a intensidade de  $\vec{F}$  é constante ou não no tempo. Vamos evidenciar um pouco mais o que queremos dizer resolvendo o seguinte problema:

### Exercício Resolvido

1. (UFSM-RS - ADAPTADA) Um jogador chuta uma bola de 0,4 kg, parada, imprimindo-lhe uma velocidade de módulo 30 m/s. Se a força sobre a bola tem uma intensidade média de 600 N, determine, em segundos, o tempo de contato do pé do jogador com a bola.

### Solução

$$I = \Delta Q$$

$$\Delta t = \frac{m}{F} (v - v_0) \rightarrow \Delta t = \frac{0,4}{600} \cdot 30 = 0,02 \text{ s}$$

### Momento Linear de uma partícula

O membro do lado direito da equação  $\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{V}$  pode ser escrito na forma  $m\vec{V} - m\vec{V}_0$ . Isso nos sugere a seguinte definição:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

7.10

Definimos o momento linear  $\vec{p}$  de uma partícula (também conhecido como quantidade de movimento  $\vec{Q}$ ) como o produto da massa pela velocidade  $\vec{v}$ . A unidade de momento linear no sistema internacional de unidades é o **quilograma x metro/segundo** =  $\frac{kg \cdot m}{s}$ .

Essa grandeza vetorial possui as seguintes características:

**Direção:** a direção de  $\vec{p}$  é sempre a mesma direção de  $\vec{v}$ .

**Sentido:** o sentido de  $\vec{p}$  é sempre o mesmo sentido de  $\vec{v}$ .

**Intensidade:** a intensidade de  $\vec{p}$  é o produto da massa da partícula pela intensidade de  $\vec{v}$ .

Em função do momento linear a energia cinética assume a forma:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}. \quad 7.11$$

## Teorema do Impulso

“O impulso da força resultante é igual a variação da quantidade de movimento”.

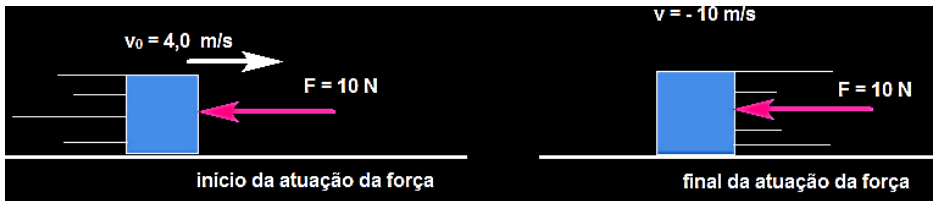
$$\vec{I}_{FR} = m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \Delta\vec{p}. \quad 7.12$$

Este resultado é conhecido como Teorema do Impulso. Ele é o análogo ao Teorema da Energia Cinética, com as correspondentes propriedades das partículas momento linear de um lado e energia cinética do outro. É um resultado geral, mesmo que a força considerada não seja constante no tempo.

## Exercício Resolvido

(Cefet-MG) Um corpo de massa  $m = 10 \text{ kg}$  se movimenta sobre uma superfície horizontal perfeitamente polida, com velocidade escalar  $v_0 = 4 \text{ m/s}$ , quando uma força constante de intensidade igual a  $10 \text{ N}$  passa a agir sobre ele na mesma direção do movimento, porém em sentido oposto. Sabendo que a influência do ar é desprezível e que quando a força deixa de

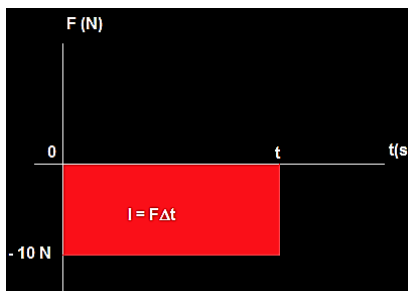
atuar a velocidade escalar do corpo é  $v = -10 \text{ m/s}$ , determine o intervalo de tempo de atuação da força.



## Solução

Veja que a força é constante em intensidade e direção e de sentido. Ela aponta em sentido oposto ao do movimento inicial do corpo. Essa força tende a frear o corpo, e com relação ao impulso, isto é representado por um impulso de intensidade negativa. Como não há atritos, as forças normal e peso se cancelam e  $\vec{F}$  é a força resultante que atua sobre o corpo. Apliquemos então o Teorema do Impulso: “O impulso da **força resultante** é igual à variação do momento linear”.

Para isto façamos o gráfico da força resultante versus tempo.



$I = \text{base} \times \text{altura},$

$$I = F\Delta t = -10\Delta t.$$

Nesta equação consideramos o sentido positivo para a força e a velocidade para a direita. Com isto,  $v_0 > 0$ ,  $v < 0$  e  $F < 0$ .

$$I_{FR} = \Delta p = mv - mv_0 = m(v - v_0),$$

$$-10\Delta t = 10(-10 - 4),$$

$$\Delta t = 14 \text{ s.}$$

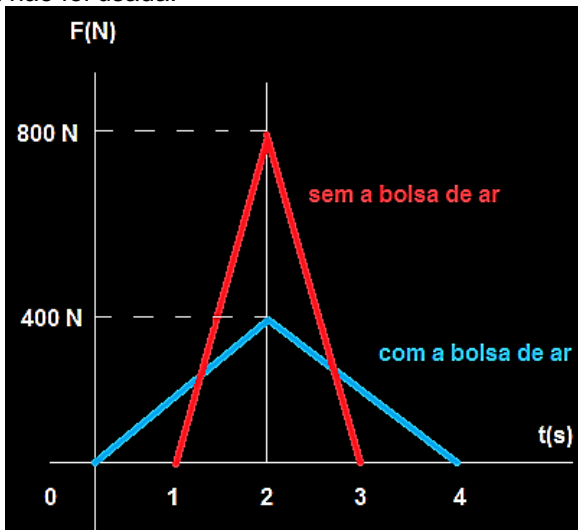
Vamos confirmar este resultado aplicando a segunda lei de Newton:

$$F_R = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

$$\Delta t = \frac{m\Delta v}{F} = \frac{10(-10 - 4)}{-10} = 14\text{s}.$$

### Exercício Resolvido

(UFRN) Alguns automóveis dispõem de um eficiente sistema de proteção para o motorista, que consiste de uma bolsa inflável de ar. Essa bolsa é automaticamente inflada, do centro do volante, quando o automóvel sofre uma desaceleração súbita, de modo que a cabeça e o tórax do motorista, em vez de colidirem com o volante, colidem com ela. A figura a seguir mostra dois gráficos da variação temporal da intensidade da força que age sobre a cabeça de um boneco que foi colocado no lugar do motorista. Os dois gráficos foram registrados em duas colisões de testes de segurança. A única diferença entre essas colisões é que, na colisão I, se usou a bolsa e, na colisão II, ela não foi usada.



## Solução

Da análise desses gráficos, indique a alternativa que melhor conclui a explicação para o sucesso da bolsa como equipamento de proteção:

- a) A bolsa diminui o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- b) A bolsa aumenta o intervalo de tempo da desaceleração da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- c) A bolsa diminui o módulo do impulso total transferido para a cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força máxima que atua sobre a cabeça.
- d) A bolsa diminui a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.
- e) A bolsa aumenta a variação total do momento linear da cabeça do motorista, diminuindo, portanto, a intensidade da força média que atua sobre a cabeça.

Vamos mostrar agora que o impulso da força resultante é o impulso total, isto é, é a soma dos impulsos produzidos pelo sistema de forças que age na partícula. Sabemos que a força resultante que age sobre a partícula é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre a mesma. Para simplificar, vamos supor que cada uma das forças que compõe o sistema de forças é constante. Isto implicará que a força resultante será constante e poderemos aplicar o resultado do impulso da força constante.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N, \quad 7.13$$

$$\vec{I}_{F_R} = \vec{F}_R \Delta t = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N) \Delta t, \quad 7.14$$

$$\vec{I}_{F_R} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N = \vec{I}_{total}. \quad 7.15$$

Na Tabela 7.1 fazemos um resumo da analogia que usamos entre as grandezas físicas trabalho e impulso.

Tabela 7. 1 – Relação de semelhanças e diferenças nos conceitos e na forma de raciocinar na resolução de problemas.

Trabalho da Força (Grandeza Escalar)	Impulso da Força (Grandeza Vetorial)
Efeito da força durante um deslocamento	Efeito da força durante um intervalo de tempo
Trabalho da Força Constante* $W = Fd$ Unidade: N.m Área no gráfico F versus posição	Impulso da Força Constante* $\vec{I} = \vec{F}\Delta t$ Unidade: N.s Área no gráfico F versus tempo
Trabalho da Força Resultante $W_{FR} = W_1 + W_2 + \dots + W_N = W_{total}$ Teorema da Energia Cinética $W_{FR} = \Delta K$	Impulso da Força Resultante $\vec{I}_{FR} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \dots + \vec{I}_N = \vec{I}_{total}$ . Teorema do Impulso $\vec{I}_{FR} = \Delta\vec{p}$
Grandeza associada a partícula: energia cinética $K = \frac{mv^2}{2}$ (escalar)	Grandeza associada a partícula: momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ (vetorial)
* vale quando F é constante	* vale quando F é constante

## Conservação do Momento Linear

Uma consequência imediata do Teorema do Impulso é a conservação do momento linear (ou conservação da quantidade de movimento). Fazendo o impulso da resultante igual a zero, a quantidade do movimento da partícula não se modifica no tempo, isto é, dizemos que se conserva.

$$\vec{I}_{FR} = \vec{0} \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}. \quad 7.16$$

Este resultado é uma outra maneira de expressar a primeira lei de Newton ou Princípio da Inércia. Sabemos desse princípio que na ausência de forças sobre a partícula sua velocidade vetorial não pode ser alterada. A ausência de forças implica que não há impulso sobre a partícula, e não havendo impulso o momento linear da partícula não pode ser alterado.

**Princípio da Inércia:** “O momento  $\vec{p} = m\vec{v}$  de uma partícula se mantém constante no tempo se a resultante das forças sobre ela for nula”

Está claro, portanto, que a única maneira de fazer o momento  $\vec{p}$  de uma partícula mudar com o passar do tempo é através da ação de forças. Isto é equivalente a enunciar a segunda lei de Newton da seguinte forma:

**Princípio Fundamental da Dinâmica:** “A variação no tempo do momento linear de uma partícula é igual à força resultante que sobre ela atua”

Demonstração: Faremos a demonstração para o caso em que a força é constante.

$$\Delta \vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}, \quad 7.17$$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}_m = m\vec{a} = \vec{F}_R. \quad 7.18$$

Para o caso  $\vec{F}$  não constante teríamos

$$\Delta \vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m\Delta\vec{v}, \quad 7.19$$

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad 7.20$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}_R. \quad 7.21$$

## Momento Linear do sistema formado por duas partículas

Até agora, em todos os momentos o nosso *sistema de interesse* sempre foi uma partícula. Vamos estender um pouco mais a nossa classe de problemas considerando situações envolvendo um sistema com duas partículas.

Seja um sistema formado por duas partículas 1 e 2, de massas  $m_1$  e  $m_2$  que possuem, no instante  $t_0$ , as velocidades  $\vec{v}_{1i}$  e  $\vec{v}_{2i}$ , respectivamente e que estão prestes a colidir.

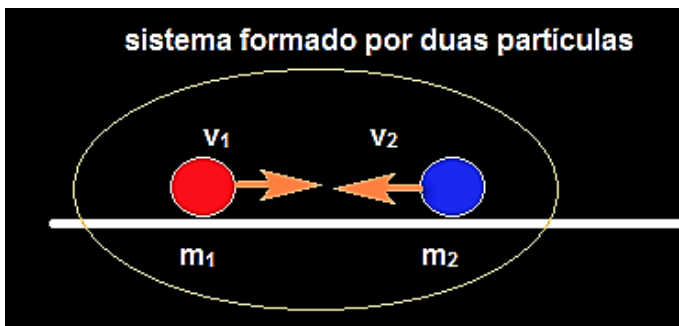


Figura 7. 2 – Sistemas com duas partículas.

Definimos o *momento linear*  $\vec{P}$  do sistema formado por duas partículas do modo mais simples possível, simplesmente pela soma dos seus momentos lineares individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}. \quad 7.22$$

Tentaremos responder as seguintes perguntas: O momento do sistema formado pelas duas partículas se conserva ou não se conserva? Em caso afirmativo, sob quais condições o momento do sistema se conserva? Sabemos que, no caso de sistemas formados por uma única partícula a *inexistência de forças* implica na conservação do momento. Vale o mesmo resultado para um sistema formado por duas partículas?

## Princípio da Conservação do Momento Linear

Se num instante posterior  $t$  (após a colisão das partículas) o momento do sistema é dado por:

$$\vec{P} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}, \quad 7.23$$

a variação  $\Delta\vec{P}$  do momento do sistema formado pelas duas partículas ser

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}(t) - \vec{P}(t_0) = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} - (m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}).$$

Agrupando os termos referentes a cada massa, encontramos:

$$\Delta\vec{P} = m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{1i}) + m_2(\vec{v}_{2f} - \vec{v}_{2i}) = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2.$$

A variação por intervalo de tempo  $\Delta t$  será:

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}. \quad 7.24$$

Para que a variação do momento do sistema  $\Delta\vec{P}$  seja nula devemos ter:

$$\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}. \quad 7.25$$

Mas, como vimos  $\frac{\Delta\vec{p}_1}{\Delta t}$  e  $\frac{\Delta\vec{p}_2}{\Delta t}$ , são as forças totais sobre as partículas 1 e 2, respectivamente. Essas forças podem ser interações decorrentes entre partículas internas ao sistema, que chamaremos de forças internas e,

interações com corpos fora do sistema, chamadas de forças externas. Assim, a força total sobre a partícula 1 será:

$$\vec{F}_1 = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}_1^{interna} + \vec{F}_1^{externa}, \quad 7.26$$

e da mesma forma para a partícula 2,

$$\vec{F}_2 = \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{F}_2^{interna} + \vec{F}_2^{externa}. \quad 7.27$$

Valendo o Princípio da Ação e Reação, as forças internas se cancelam mutuamente

$$\vec{F}_1^{interna} + \vec{F}_2^{interna} = \vec{0} \quad 7.28$$

pois,

$$\vec{F}_1^{interna} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -\vec{F}_2^{interna}. \quad 7.29$$

Portanto,

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{0},$$

somente se a soma das forças externas ao sistema for nula,

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{F}_1^{externa} + \vec{F}_2^{externa} = \vec{0}. \quad 7.30$$

### Em resumo:

Para que o momento linear de um sistema seja formado por duas partículas se conserve ( $\Delta \vec{P} = 0$ ) é necessário que as forças externas sobre o sistema se anulem,

$$\vec{F}_{Ext} = 0$$

Esse é o princípio da Conservação do Momento Linear.

## Colisões

Denominamos colisão ou choque à interação entre partículas que ocorre durante um pequeníssimo intervalo de tempo.

Desta forma é possível perceber claramente uma mudança brusca nas velocidades das partículas antes e depois da colisão. Em uma colisão real entre duas bolas rígidas como, por exemplo, duas bolas de bilhar, sempre ocorre alguma dissipação de energia mecânica.

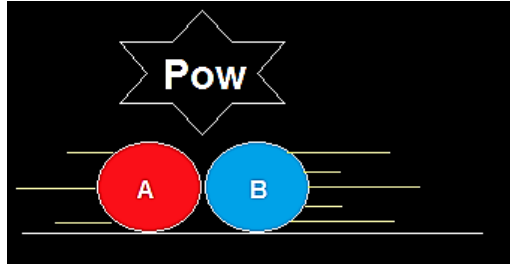


Figura 7. 3 - Colisão entre duas bolas rígidas.

A energia inicial do sistema diminui sendo transformada em alguma outra espécie de energia. O som emitido no contato das bolas no instante da colisão é um exemplo de energia mecânica dissipada em forma de energia sonora. Chamamos essas colisões de inelásticas.

Uma colisão idealizada, onde a energia cinética é preservada é denominada de colisão elástica.

Na colisão elástica, o momento linear é conservado

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final} \quad 7.31$$

A energia cinética é conservada

$$K_{inicial} = K_{final} \quad 7.32$$

## Colisões Elásticas Unidimensionais

Quando duas bolas reais colidem essas colisões podem ser consideradas não frontais ou frontais. Chamamos de colisão *não frontal* quando o centro das duas bolas estão sobre retas paralelas não coincidentes. Neste tipo de colisão existe alteração na direção das velocidades das bolas como ocorre nas colisões bidimensionais.

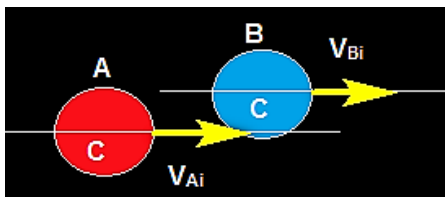


Figura 7. 4 – Colisão frontal

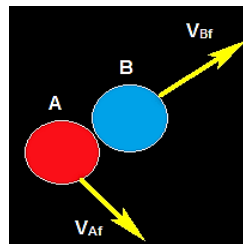


Figura 7. 5 – Colisão não frontal

Chamamos de colisão *frontal* àquela em que os centros das duas bolas estão sobre uma mesma reta. A colisão se processa sobre esta reta sem alteração na direção dos movimentos das partículas. Este é o caso de uma colisão unidimensional.



Figura 7. 6 - Colisão unidimensional

Consideremos uma colisão elástica frontal entre as duas bolas como mostra a figura. Sendo conhecidas as massas e as velocidades das partículas antes da colisão, queremos determinar a velocidade das partículas após a colisão. A energia cinética do sistema formado pelas duas partículas A e B é preservada para este tipo de colisão:

$$K_{inicial}^{Sistema} = K_{final}^{Sistema} \quad 7.34$$

$$\frac{1}{2} m_A V_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{Bi}^2 = \frac{1}{2} m_A V_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B V_{Bf}^2. \quad 7.35$$

Além disso, para qualquer colisão, não somente a colisão elástica o momento do sistema de partículas também é preservado,

$$p_{inicial}^{Sistema} = p_{final}^{Sistema} \quad 7.36$$

$$m_A V_{Ai} + m_B V_{Bi} = m_A V_{Af} + m_B V_{Bf}. \quad 7.37$$

Observe que, pelo fato da direção do movimento das partículas não ser alterada na colisão frontal, não há necessidade de um tratamento vetorial para o momento linear do sistema. As velocidades só poderão ser alteradas em intensidade e/ou sentido.

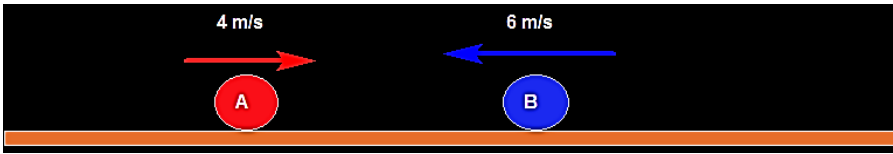
Resolvendo o sistema de equações encontramos as velocidades finais das partículas:

$$V_{Bf} = \left( \frac{2m_A}{m_A + m_B} \right) V_{Ai} + \left( \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} \right) V_{Bi} \quad 7.38$$

$$V_{Af} = \left( \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right) V_{Ai} + \left( \frac{2m_B}{m_A + m_B} \right) V_{Bi} \quad 7.39$$

### Exercício Resolvido

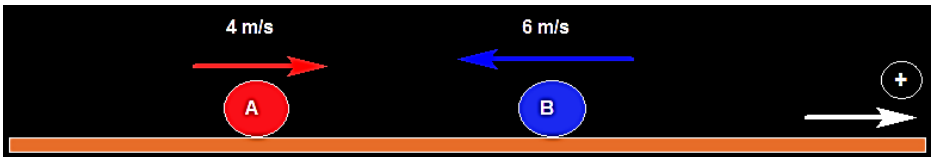
Duas partículas, A e B, de massas  $m_A = 5 \text{ kg}$  e  $m_B = 3 \text{ kg}$  estão em rota de colisão se aproximando uma da outra com velocidades iniciais de módulos  $V_{Ai} = 4 \text{ m/s}$  e  $V_{Bi} = 6 \text{ m/s}$ , conforme ilustra a figura abaixo.



Sabe-se que durante a colisão nenhuma perda de energia cinética do sistema formado pelas duas partículas acontece. Determine as velocidades finais de A e B.

### Solução

Vamos orientar a trajetória para a direita. Desta forma a velocidade de A será positiva e a de B será negativa.



Como não há perda de energia cinética no sistema, a colisão é elástica, com as velocidades iniciais dadas por:

$$V_{Af} = \left( \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \right) V_{Ai} + \left( \frac{2m_B}{m_A + m_B} \right) V_{Bi}$$

$$V_{Bf} = \left( \frac{2m_A}{m_A + m_B} \right) V_{Ai} + \left( \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} \right) V_{Bi}$$

Neste caso  $m_A = 5 \text{ kg}$ ;  $m_B = 3 \text{ kg}$ ;  $V_{Ai} = 4 \frac{m}{s}$  e  $V_{Bi} = -6 \frac{m}{s}$ . Substituindo os dados encontramos os seguintes resultados:

$$V_{Af} = -3,5 \frac{m}{s}$$

$$V_{Bf} = 6,5 \frac{m}{s}$$

## Colisões Inelásticas Unidimensionais

Para este tipo de colisão não haverá conservação da energia cinética, apenas o momento linear é conservado.

As colisões inelásticas podem ser: perfeitamente inelásticas e parcialmente inelásticas.

Em uma colisão *perfeitamente inelástica*, os corpos permanecem juntos após a colisão de modo que a velocidade é a mesma para ambos após o choque. Só havendo uma velocidade a determinar, para resolução de problemas desse tipo basta usar a conservação do momento linear.

$$p_{\text{Sistema}}^{\text{inicial}} = p_{\text{Sistema}}^{\text{final}} \quad 7.40$$

Considere as seguintes figuras ilustrativas para uma colisão perfeitamente inelástica. Sejam  $m_A$  e  $m_B$  as massas das partículas A e B, respectivamente.



Figura 7.7 – Colisão perfeitamente elástica.

A intensidade  $V$  velocidade comum vale:

$$P_i = P_f \quad 7.41$$

$$V = \frac{m_A V_{Ai} + m_B V_{Bi}}{(m_A + m_B)}$$

Quando a colisão é perfeitamente inelástica pode-se mostrar que a perda de energia cinética do sistema de partículas é máxima. Desta forma, dizemos que uma colisão é *parcialmente inelástica* quando a perda de energia produzida durante a colisão está compreendida no intervalo:

$$0 < \Delta K < \Delta K_{m\acute{a}x}. \quad 7.42$$

Tipo de Colisão	Elástica	Parcialmente Inelástica	Perfeitamente Inelástica
Perda de Energia Cinética $\Delta K$	Zero	Parcial	Máxima

## Coeficiente de Restituição

Podemos caracterizar mais facilmente os diferentes tipos de colisão com o auxílio do *coeficiente de restituição*  $e$ .

Definimos o coeficiente de restituição  $e$  como a razão entre os módulos das velocidades relativas após a colisão e antes da colisão:

$$e = \frac{|v_{rel}^{ap\acute{o}s\ a\ colis\~{a}o}|}{|v_{rel}^{antes\ da\ colis\~{a}o}|} \quad 7.43$$

Essa grandeza, sendo a razão de duas velocidades, é adimensional.

Para a colisão elástica  $e = 1$ , enquanto que, para a colisão perfeitamente inelástica  $e = 0$ . Se o valor de  $e$  está compreendido no intervalo  $0 < e < 1$  a colisão é parcialmente inelástica.

A velocidade relativa é definida como o vetor diferença entre as velocidades das duas partículas. Por exemplo, se quisermos determinar a velocidade relativa da partícula A **em relação a partícula B**, fazemos:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \vec{v}_{AB}. \quad 7.44$$

A velocidade de B em relação a A é:

$$\vec{v}_{BA} = -\vec{v}_{AB}. \quad 7.45$$

### Exercício Resolvido

Em um ringue de patinação no gelo, dois patinadores, um de 40 kg e outro de 60 kg, estão parados um em frente ao outro. Um deles resolve empurrar o outro e ambos passam a se movimentar em sentidos opostos. Sabendo que o patinador de 60 kg adquire velocidade de 4 m/s, determine a velocidade adquirida pelo outro patinador.

### Solução

Como o sistema formado pelos dois patinadores é isolado de forças externas, a quantidade de movimento inicial será igual a quantidade de movimento após o empurrão.

Logo, a quantidade de movimento final será igual a zero, pois inicialmente os dois estavam em repouso. Então:

$$p_f = p_i = 0 \quad 7.46$$

A quantidade de movimento final é igual à soma vetorial da quantidade de movimento de cada patinador, neste caso teremos:

$$\vec{p}_f = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \quad 7.47$$

Como as velocidades apresentam sentidos opostos, vamos indicar uma delas com sinal de (-), assim:

$$m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1 = 0 \quad 7.48$$

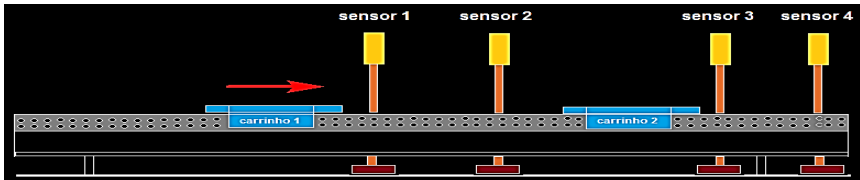
Substituindo os valores:

$$\begin{aligned} 60 \cdot 4 - 40 \cdot v_1 &= 0 \\ v_1 &= \frac{240}{40} = 6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

### Exercício Resolvido

(ENEM 2016) O trilho de ar é um dispositivo utilizado em laboratórios de física para analisar movimentos em que corpos de prova (carrinhos) podem se mover com atrito desprezível. A figura ilustra um trilho horizontal com dois

carrinhos (1 e 2) em que se realiza um experimento para obter a massa do carrinho 2. No instante em que o carrinho 1, de massa 150,0 g, passa a se mover com velocidade escalar constante, o carrinho 2 está em repouso. No momento em que o carrinho 1 se choca com o carrinho 2, ambos passam a se movimentar juntos com velocidade escalar constante. Os sensores eletrônicos distribuídos ao longo do trilho determinam as posições e registram os instantes associados à passagem de cada carrinho, gerando os dados do quadro.



Carrinho 1		Carrinho 2	
Posição (cm)	Instante (s)	Posição (cm)	Instante (s)
15,0	0,0	15,0	0,0
30,0	1,0	30,0	1,0
75,0	8,0	75,0	8,0
90,0	11,0	90,0	11,0

## Solução

Inicialmente vamos calcular as velocidades dos carrinhos usando os valores da tabela e a equação do movimento retilíneo uniforme ( $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ), logo:

$$v_1 = \frac{30-15}{1-0} = 15 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V = \frac{90-75}{11-8} = 5 \text{ m/s}$$

Considerando a conservação da quantidade de movimento, temos que  $p_f = p_i$  então:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \cdot V &= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 \\ (150 + m_2) \cdot 5 &= 150 \cdot 15 + m_2 \cdot 0 \\ 750 + m_2 \cdot 5 &= 2250 \\ 5m_2 &= 2250 - 750 \\ m_2 &= 1500/5 = 300 \text{ g} \end{aligned}$$

1. O Impulso de uma força constante é dado por:

$$I = F \cdot \Delta t$$

2. O momento linear de uma partícula é definido como:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

3. O teorema do Impulso afirma que: “o impulso da força resultante é igual a variação da quantidade de movimento”.

$$\vec{I}_{FR} = m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \Delta\vec{p}$$

4. O momento linear  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  de uma partícula se mantém constante no tempo se a resultante das forças sobre ela for nula.

5. A variação do momento linear de uma partícula é igual a força resultante que atua sobre ela.

6. Fazendo o impulso da resultante igual a zero, a quantidade do movimento da partícula não se modifica no tempo, isto é, dizemos que se conserva.

$$\vec{I}_{FR} = \vec{0} \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}_{inicial} = \vec{p}_{final}.$$

7. Definimos o *momento linear*  $\vec{P}$  do sistema formado por duas partículas do modo mais simples possível, simplesmente pela soma dos seus momentos lineares individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}$$

8. Para que o momento linear de um sistema formado por duas partículas se conserve ( $\Delta\vec{P} = \vec{0}$ ) é necessário que as forças externas sobre o sistema se anulem,  $\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$ .

9. Na colisão elástica,

O momento linear é conservado  $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$   
e

A energia cinética é conservada  $K_{inicial} = K_{final}$

10. Em uma colisão *perfeitamente inelástica*, os corpos permanecem juntos após a colisão de modo que a velocidade é a mesma para ambos após o choque.

$$V = \frac{m_A V_{Ai} + m_B V_{Bi}}{(m_A + m_B)}$$

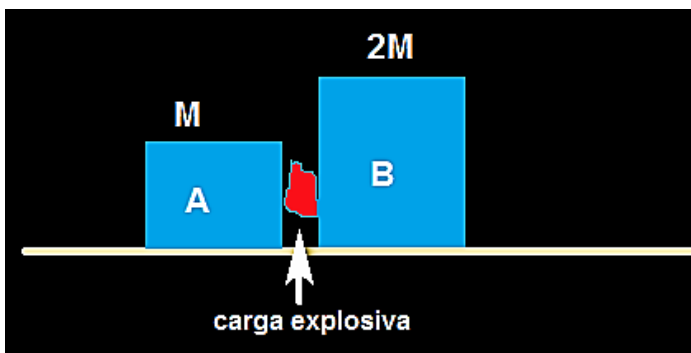
11. Definimos o coeficiente de restituição  $e$  como a razão entre os módulos das velocidades relativas após a colisão e antes da colisão:

$$e = \frac{|v_{rel}^{após\ a\ colisão}|}{|v_{rel}^{antes\ da\ colisão}|}$$

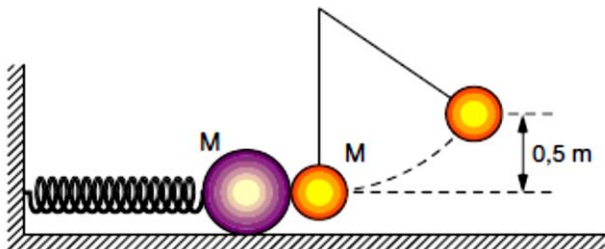
## Exercícios do Capítulo 7

1- Sobre o trilho de ar estão dois carrinhos. O primeiro tem massa 250 g e o segundo, 400 g. O segundo carrinho está inicialmente em repouso. O primeiro é lançado sobre ele com uma velocidade de 10 cm/s, e os dois carrinhos ficam grudados. Qual a velocidade final dos dois? Qual a variação na energia cinética do sistema?

2. (UFV-MG) Dois blocos, **A** e **B**, feitos de materiais idênticos, um com massa **M** e o outro com massa **2M**, encontram-se inicialmente em repouso sobre uma superfície plana e com atrito, separados por uma carga explosiva de massa desprezível. A situação inicial do sistema está ilustrada na figura abaixo. Após a explosão da carga, o bloco **A** percorre uma distância **L**, deslizando pela superfície até parar. Qual a distância percorrida pelo bloco **B**?



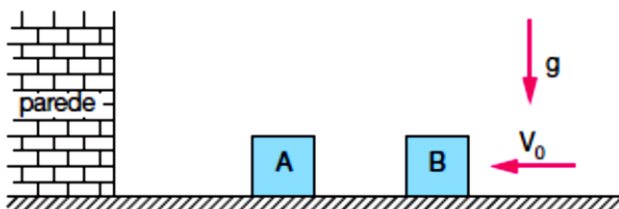
3. (UFRJ) Uma esfera de massa igual a 100 g está sobre uma superfície horizontal sem atrito, e prende-se à extremidade de uma mola de massa desprezível e constante elástica igual a 9 N/m. A outra extremidade da mola está presa a um suporte fixo, conforme mostra a figura (no alto, à direita). Inicialmente a esfera encontra-se em repouso e a mola no seu comprimento natural. A esfera é então atingida por um pêndulo de mesma massa que cai de uma altura igual a 0,5 m. Suponha a colisão elástica e  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



Calcule:

- as velocidades da esfera e do pêndulo imediatamente após a colisão
- a compressão máxima da mola.

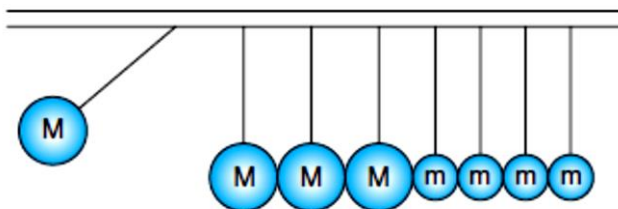
4. (FUVEST-SP) Dois caixotes de mesma altura e mesma massa,  $A$  e  $B$ , podem movimentar-se sobre uma superfície plana sem atrito. Estando inicialmente  $A$  parado próximo a uma parede, o caixote  $B$  aproxima-se perpendicularmente à parede com velocidade  $V_0$ , provocando uma sucessão de colisões elásticas no plano da figura.



5. (VUNESP-SP) A figura mostra o gráfico das velocidades de dois carrinhos que se movem sem atrito sobre um mesmo par de trilhos horizontais e retilíneos. Em torno do instante 3 segundos, os carrinhos colidem. Se as massas dos carrinhos 1 e 2 são, respectivamente,  $m_1$  e  $m_2$ , calcule a razão  $m_1/m_2$ .



6. (UECE) Oito esferas estão suspensas, sendo quatro de massa  $M = 150$  g e quatro de massa  $m = 50$  g, por fios flexíveis, inextensíveis e de massas desprezíveis, conforme a figura. Se uma esfera de massa  $M$  for deslocada de sua posição inicial e solta, ela colidirá frontalmente com o grupo de esferas estacionadas.



Considere o choque entre as esferas perfeitamente elástico. O número  $n$  de esferas de massa  $m$  que se moverão é:

7. (MACK-SP) Na figura, o menino e o carrinho têm juntos  $60$  kg. Quando o menino salta do carrinho em repouso, com velocidade horizontal de  $2$  m/s, o carrinho vai para trás com velocidade de  $3$  m/s. Determine a massa do menino.



8. (ITA-SP) Um martelo de bate-estacas funciona levantando um corpo de pequenas dimensões e de massa  $70,0 \text{ kg}$  acima do topo de uma estaca de massa  $30,0 \text{ kg}$ . Quando a altura do corpo acima da estaca é de  $2,00 \text{ m}$ , ela afunda  $0,50 \text{ m}$  no solo. Supondo uma aceleração da gravidade de  $10,0 \text{ m/s}^2$  e considerando o choque inelástico, determine a força média de resistência à penetração da estaca.

9. (UNITAU-SP) Uma garota de massa  $m$  está sobre um carrinho de massa  $4m$  e segura em sua mão uma bola de massa  $m/10$ , todos em repouso em relação ao solo. Ela atira a bola, horizontalmente, com velocidade de  $21 \text{ m/s}$  em relação ao carrinho. Desprezando-se qualquer atrito, calcule o módulo da velocidade de recuo do carrinho.

10. (UNIFOR-CE) Um caixote de massa  $2,0 \text{ kg}$ , aberto em sua parte superior, desloca-se com velocidade constante de  $0,40 \text{ m/s}$  sobre um plano horizontal sem atrito. Começa, então, a chover intensamente na vertical. Qual será a velocidade do caixote quando o mesmo estiver armazenado  $2,0 \text{ kg}$  de água?

Encontrem na sopa de letras as palavras solicitadas:

# Conservação do Momento Linear



Massa  
Conservação  
Momento  
Energia  
Cinética

Colisão  
Inelástica  
Elástica  
Linear  
Sistema

# Cap. 8

## O Movimento de Planetas e Satélites



Representação dos planetas no sistema solar.

### Introdução

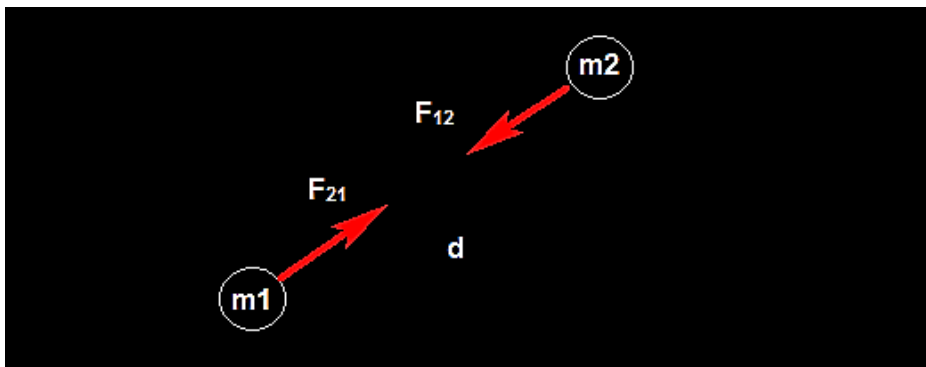
Neste capítulo vamos fazer o estudo da dinâmica dos corpos celestes, sobretudo o estudo do movimento dos planetas em torno do sol. Estudaremos as contribuições Kepler e de Newton na construção da Teoria da Gravitação Universal.

## De volta à Força de atração Gravitacional

Já vimos, no estudo do campo gravitacional, que dois objetos pontuais de massas  $m_1$  e  $m_2$  separados por uma distância  $d$  atraem-se mutuamente pela força gravitacional, que possui as seguintes características:

- Direção: da reta que une as duas partículas;
- Sentido: sempre atrativo;
- Intensidade  $F_G = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal. Essa é a Lei da Atração Gravitacional de Newton.



**Figura 8.1** – Partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  separadas por uma distância  $d$  se atraindo, sendo  $F_{12}$  e  $F_{21}$ , as intensidades das forças da partícula 1 sobre a 2 e 2 sobre a 1.

A Figura 8.1 mostra as partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$  separadas por uma distância  $d$  se atraindo, sendo  $F_{12}$  e  $F_{21}$ , as intensidades das forças da partícula 1 sobre a 2 e 2 sobre a 1, respectivamente.

Uma das grandes contribuições de Newton no estudo do movimento dos corpos celestes foi provar que corpos de formas esféricas, como são os planetas e o nosso Sol, também se atraem com o mesmo tipo de força. Enunciamos este fato dizendo:

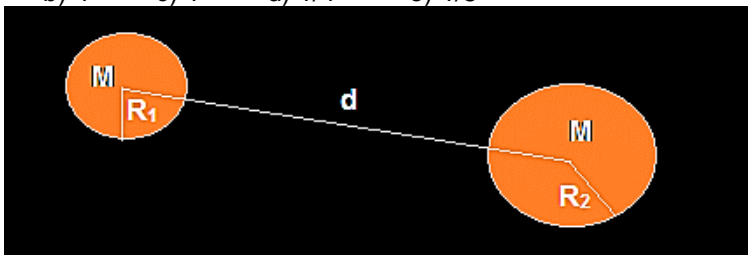
“Dois corpos *esféricos* de massas  $M$  e  $m$  se atraem mutuamente, exatamente como se fossem duas partículas de massas iguais as

respectivas massas dos corpos e que ocupam os centros geométricos dos mesmos, isto é, o centro de cada esfera”.

## Exercícios Resolvido

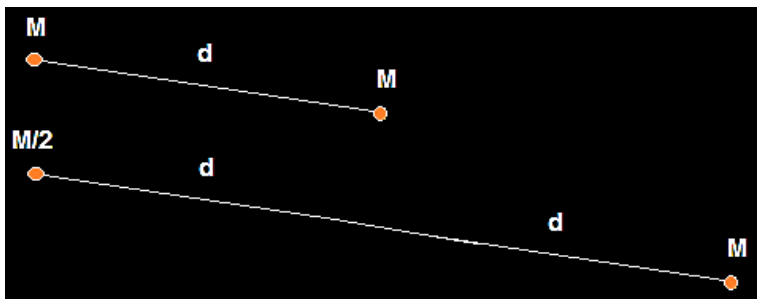
(UFSM-RS) Dois corpos esféricos de mesma massa têm seus centros separados por uma certa distância, maior que o seu diâmetro. Se a massa de um deles for reduzida à metade e a distância entre seus centros, duplicada, o módulo da força de atração gravitacional que existe entre eles estará multiplicado por:

- a) 8      b) 4      c) 1      d) 1/4      e) 1/8



## Solução

De acordo com Newton a solução desse problema é a mesma se as esferas forem tratadas como corpos pontuais localizados nos centros das esferas e onde se concentra toda a massa. Resolvemos então, a esse problema mostrado na figura abaixo:



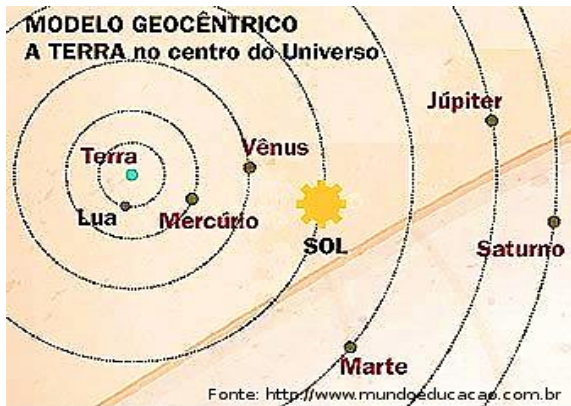
As forças entre as massas  $M$  e  $M$  (à distância  $d$  entre si), e as massas  $M/2$  e  $M$  (à distância  $2d$  entre si), valem respectivamente:

$$F_G = G \frac{M^2}{d^2} \text{ e } F'_G = G \frac{M^2}{8 d^2}$$

$$\frac{F'_G}{F_G} = \frac{1}{8}$$

## As três leis de Kepler para o movimento dos planetas

O centro do sistema com os planetas orbitando em sua volta. Esse modelo se opunha ao modelo chamado de geocêntrico, o qual admitia que o centro não era ocupado pelo Sol e sim pela Terra. No modelo geocêntrico todos os corpos celestes girariam em torno da Terra.



**Figura 8. 2** - O modelo atual do nosso sistema planetário é devido à Nicolau Copérnico.

A transição do modelo geocêntrico para o heliocêntrico foi de forma gradual e as contribuições científicas de Galileu e de Kepler foram fundamentais para essa mudança.

Johannes Kepler, por volta do ano de 1600, foi assistente de Tycho Brahe, considerado o maior astrônomo antes da invenção do telescópio. Brahe observou o céu insistentemente por muitos e muitos anos colecionando um número enorme de dados astronômicos sobre os planetas. De posse desses dados, Kepler deduziu as suas três leis do movimento planetário.

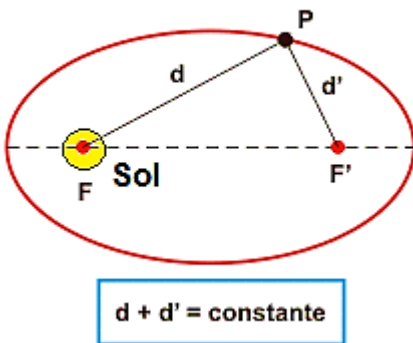
## Primeira Lei de Kepler – Lei das Órbitas

“As trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.”

Chamamos de elipse a figura plana formada pelo conjunto P de pontos, tais que suas distâncias  $d$  e  $d'$  a dois pontos fixos  $F$  e  $F'$  (os focos da elipse) é uma constante:

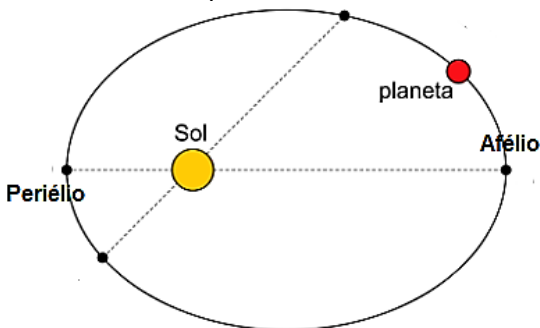
$$d + d' = \text{constante} \quad 8.1$$

**P: planeta**



**Figura 8.3** - Ilustração que representa o planeta (P) girando em torno do Sol com este ocupando um dos focos (F).

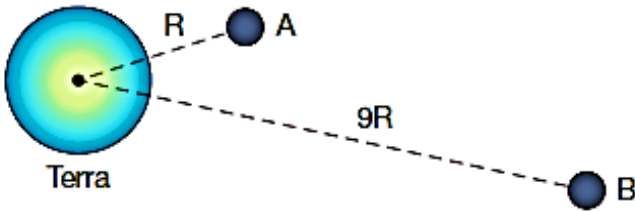
De acordo com Kepler, P na figura acima representa o planeta que gira em torno do Sol com este ocupando um dos focos. Observe ainda que em determinada época do ano o planeta está mais próximo do Sol e em outra época mais distante dele. Chamamos o ponto de maior aproximação entre o planeta e o Sol de *Periélio* e o ponto de maior afastamento de *Afélio*.



**Figura 8.4** - Representação do Afélio e do Periélio em relação ao Sol.

## Exercícios Resolvido

Um satélite artificial  $A$  se move em órbita circular em torno da Terra com um período de 25 dias. Um outro satélite  $B$  possui órbita circular de raio 9 vezes maior do que  $A$ . Calcule o período do satélite  $B$ .



## Solução

Dados

$$a_A = R$$

$$a_B = 9R$$

$$T_A = 25 \text{ dias}$$

$$T_A^2 = k \cdot a_A^3 \quad 8.1.1$$

$$T_B^2 = k \cdot a_B^3 \quad (2) \quad 8.1.2$$

Dividindo eq. 8.1.1 pela eq. 8.1.2 temos:

$$\frac{T_B^2}{T_A^2} = \frac{k \cdot a_B^3}{k \cdot a_A^3} \rightarrow \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^2 = \left(\frac{a_B}{a_A}\right)^3$$

$$\left(\frac{T_B}{25}\right)^2 = \left(\frac{9R}{R}\right)^3 \rightarrow \left(\frac{T_B}{25}\right)^2 = 9^3$$

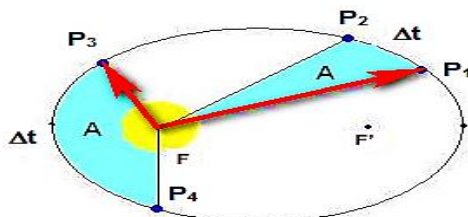
$$\frac{T_B}{25} = \sqrt{9^3} = \sqrt{9 \cdot 9^2}$$

$$\frac{T_B}{25} = 3 \cdot 9$$

$$T_B = 675 \text{ dias}$$

## Segunda Lei de Kepler – Lei das Áreas

“Enquanto os planetas se movem em torno do sol, o raio vetor varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.”



**Figura 8.5** - O raio vetor é a reta imaginária que liga em cada instante o centro do planeta e o centro do Sol. Ele aparece como uma seta em vermelho na figura.

A Figura 8.5 mostra o raio vetor como reta imaginária que liga em cada instante o centro do planeta e o centro do Sol. Ele aparece como uma seta em vermelho na figura. A medida que o planeta gira em torno do Sol o seu raio vetor se desloca, varrendo uma área que é proporcional ao tempo de movimento do planeta  $\Delta t$ . Se os intervalos de tempo, em que o planeta vai de  $P_1$  até  $P_2$  e de  $P_3$  a  $P_4$  são iguais, a segunda lei de Kepler nos diz que as áreas varridas são iguais.

Chama-se de velocidade  $v_a$  areolar à razão entre a área varrida pelo raio vetor do planeta ( $\Delta A$ ) e o intervalo de tempo necessário ( $\Delta t$ ):

$$v_a = \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad 8.2$$

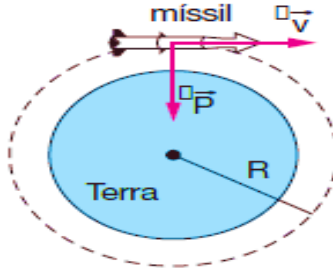
### Exercício Resolvido

(UNICAMP-SP) Um míssil é lançado horizontalmente em órbita circular rasante à superfície da Terra. Adote o raio da Terra  $R = 6\,400$  km e, para simplificar, tome 3 como valor aproximado de  $\pi$ .

- Qual é a velocidade de lançamento?
- Qual é o período da órbita?

## Solução

a)



Um corpo em órbita está sob a ação exclusiva de seu peso

$$R_c = P \rightarrow m \cdot a_c = m \cdot g \rightarrow \frac{v^2}{R} = g \therefore v = \sqrt{g \cdot R} \therefore v = \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} \rightarrow v = 8000 \text{ m/s}$$

b)

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \therefore \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

Observando-se apenas uma volta:

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6,4 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^3} \therefore T = 4800 \text{ s}$$

## Terceira Lei de Kepler – Lei dos Períodos

“A razão entre o quadrado do período e o cubo do raio médio (distância entre o corpo que orbita e o corpo central) é uma constante.”

$$\frac{T^2}{r^3} = K_p \quad 8.3$$

Na tabela abaixo apresentamos os dados astronômicos dos planetas do nosso sistema solar.

Planeta	Raio Médio da Órbita (UA)	Período de Revolução (dias)	Razão $\frac{R^3}{T^2}$
Mercúrio	0,389	87,77	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Vênus	0,724	224,70	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Terra	1,000	365,25	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Marte	1,524	686,98	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Júpiter	5,200	4332,62	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Saturno	9,510	10759,20	$7,64 \cdot 10^{-6}$

Urano	19,261	30787,03	$7,64 \cdot 10^{-6}$
Netuno	30,201	60185,18	$7,64 \cdot 10^{-6}$

Os raios médios de suas órbitas estão medidos em unidades astronômicas **UA**, onde o raio médio da Terra é tomado como unidade de medida. Observe a coluna mais à direita que mostra o valor da constante  $K_p$ .

Visto que as trajetórias dos planetas são elípticas o raio médio da órbita de um planeta é definido como a média aritmética entre os raios no afélio e no periélio.

$$r = \frac{d_{afélio} + d_{periélio}}{2} \quad 8.4$$

### Exercício Resolvido

(CEFET-PR) Dois satélites artificiais giram em torno da Terra em órbitas de mesma altura. O primeiro tem massa  $m_1$ , e o segundo, massa  $3m_1$ . Se o primeiro tem período de 6 h, o período do outro será, em horas, igual a:

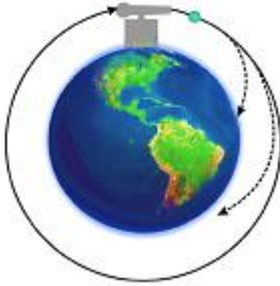
- a) 18
- b) 2
- c) 6
- d)  $6\sqrt{3}$
- e)  $3\sqrt{2}$

### Solução

O período orbital independe da massa do satélite. Depende apenas da altura da órbita. Como ambos os satélites apresentam órbitas de mesma altura, seus períodos são iguais.

### Velocidade dos Objetos em Órbita – O canhão de Newton

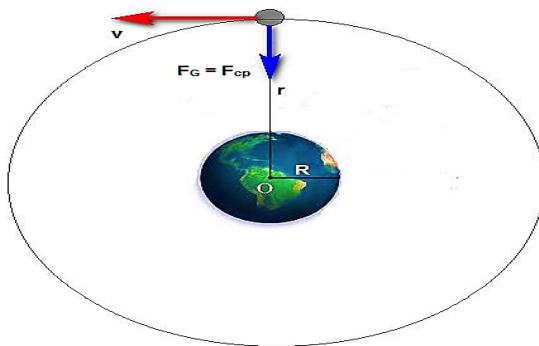
Até a época de Newton acreditava-se que o movimento dos corpos celestes obedecia a lei diferentes daquelas que regiam o movimento dos corpos terrenos. Existia uma distinção entre a Física dos corpos terrenos e a Física do mundo celestial. Newton foi capaz de unificar esses dois mundos mostrando que a lei que rege o movimento dos corpos é a mesma. Para Newton o mesmo tipo de força que explica a queda dos corpos também explica o movimento dos corpos celestes, como por exemplo, a lua.



**Figura 8. 6** - lançamento de objetos feito por um canhão idealizado por Newton.

Na figura ao lado esquerdo vemos a ilustração sobre o lançamento de objetos feito por um canhão idealizado por Newton. Nela o objeto é lançado horizontalmente e rasante à superfície terrestre com diferentes velocidades iniciais. Quanto maior a velocidade inicial mais distante o objeto cairá do seu ponto de lançamento ao retornar ao solo. Newton imaginou então, que para uma velocidade suficientemente grande o corpo não mais retornaria ao solo, permanecendo em movimento circular em torno da Terra. Imaginou ainda que é isto que ocorre com a Lua, pois a mesma permanece girando em torno do nosso planeta.

Assim a Lua não se precipita no sentido de colidir com a Terra, pois, possui uma velocidade constante suficiente para se manter em trajetória circular com centro no centro da Terra. Do nosso estudo da dinâmica do movimento circular, sabemos que a resultante centrípeta é a força necessária para que um corpo se mantenha em movimento circular uniforme. Newton foi levado a concluir que a interação gravitacional entre a Terra e a Lua era a força responsável pela resultante centrípeta sobre a Lua.



**Figura 8. 7** - Interação gravitacional entre a Terra e a Lua era a força responsável pela resultante centrípeta sobre a Lua.

$$F_G = F_{cp}.$$

8.5

Considerando a força gravitacional e força centrípeta, podemos escrever a velocidade requerida pela Lua é dada por:

$$G \frac{M_T m_L}{r^2} = \frac{m_L v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} \quad 8.6$$

Este resultado nos mostra que a velocidade do objeto em órbita é independente de sua massa, dependendo apenas da massa do corpo central (corpo em relação ao qual orbita) e da distância até ao centro do planeta, isto é, o raio de sua órbita. Ela prevê ainda diferentes valores para os raios em que um objeto pode ser colocado em órbita ao redor de um planeta.

## Newton e a Lei dos Períodos de Kepler

Newton conseguiu justificar teoricamente a lei dos períodos de Kepler. Sendo  $T_L$  o período de rotação da Lua ao redor da Terra,  $r$  o raio de sua órbita e lembrando a relação entre as velocidades linear  $v$  e angular  $\omega$ ,

$$v = \omega r, \quad 8.7$$

de um corpo em rotação, vemos que:

$$\omega r = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} \quad 8.8$$

$$\frac{2\pi}{T_L} = \sqrt{G \frac{M_T}{r^3}} \quad 8.9$$

$$\frac{4\pi^2}{T_L^2} = G \frac{M_T}{r^3} \rightarrow \frac{T_L^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}, \quad 8.10$$

que é a terceira lei de Kepler.

Por comparação, identificamos a constante de Kepler,

$$K_P = \frac{4\pi^2}{GM_T}, \quad 8.11$$

que depende exclusivamente da massa do corpo central, que no caso presente é a Terra. No caso do nosso sistema solar, o corpo central é o Sol com os demais planetas girando ao seu redor. Neste caso a constante  $K_P$  será:

$$K_P = \frac{4\pi^2}{GM_S}, \quad 8.12$$

onde  $M_S$  é a massa do Sol.

## Período de Rotação de um Satélite

Podemos calcular o período  $T_S$  de rotação de um satélite que gira em torno de um planeta usando diretamente a terceira lei de Kepler e o valor da constante  $K_P$  exposto acima.

$$\frac{T_S^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G} M_P \rightarrow T_S = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_P}} \quad 8.13$$

onde  $M_P$  é a massa do planeta em relação ao qual o satélite orbita. Observe que é independente da massa do próprio satélite. Todos os satélites com diferentes massas terão o mesmo período se seus raios orbitais são iguais.

## Satélite Geoestacionário

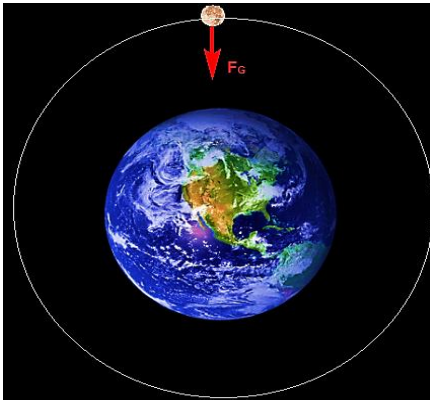
Um satélite geoestacionário é aquele que acompanha o movimento de rotação da Terra. Visto do nosso planeta está sempre estacionário em relação a ele. Desta forma o período de rotação do satélite é igual ao período de rotação de nosso planeta em torno do próprio eixo, isto é, 24 h. Os satélites geoestacionários geralmente são utilizados em comunicação com raio orbital aproximadamente igual a 42.000 km.

## A grande sacada de Newton

Newton confirmou de maneira categórica a validade de sua lei da Gravitação Universal,

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{d^2}, \quad 8.14$$

Quando comparou a aceleração da Lua enquanto orbita em torno da Terra e a aceleração da queda dos corpos nas proximidades da superfície terrestre. Reza a lenda que uma maçã teria caído na cabeça de Newton levando-o a pensar a gravidade na superfície terrestre se estendendo até a órbita da Lua. Daí a ideia de comparar as acelerações de queda da maçã e de rotação da Lua. A aceleração da Lua é do tipo centrípeta,



**Figura 8. 8** - A aceleração da Lua enquanto orbita em torno da Terra.



**Figura 8. 9** - A aceleração da queda dos corpos nas proximidades da superfície terrestre.

$$a_L = a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T_L^2} r_L. \quad 8.15$$

Substituindo o valor do período de revolução da lua em torno da Terra  $T_L$  por 27,3 dias e o raio da órbita da lua  $r_L = 60R_T$ , onde  $R_T$  é o raio terrestre (64000 km), Newton encontrou o resultado:

$$a_L = 0,002725 \frac{m}{s^2}. \quad 8.16$$

Agora vamos usar a lei da gravitação de Newton e verificar se o resultado é o mesmo. A força resultante sobre a Lua é a força gravitacional entre ela e a Terra. Assim,

$$G \frac{M_T m_L}{r^2} = m_L a_L \rightarrow a_L = G \frac{M_T}{r^2} \quad 8.17$$

$$a_L = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{60^2} = \frac{g}{3600} = 0,002725 \frac{m}{s^2}, \quad 8.17$$

onde usamos o fato de que  $g = G \frac{M_T}{R_T^2} = 9,81 \frac{m}{s^2}$  é a aceleração de queda dos corpos situados nas proximidades da superfície terrestre como, por exemplo, a maçã.

A concordância entre as duas formas de cálculo é absurda. A lei da gravitação universal de Newton é verdadeira!

## Exercício Resolvido

(UFSC) Sobre as leis de Kepler, assinale a(s) proposição (ões) verdadeira(s) para o sistema solar.

(01) O valor da velocidade de revolução da Terra em torno do Sol, quando sua trajetória está mais próxima do Sol, é maior do que quando está mais afastada do mesmo.

(02) Os planetas mais afastados do Sol têm um período de revolução em torno do mesmo maior que os mais próximos.

(04) Os planetas de maior massa levam mais tempo para dar uma volta em torno do Sol, devido à sua inércia.

(08) O Sol está situado num dos focos da órbita elíptica de um dado planeta.

(16) Quanto maior for o período de rotação de um dado planeta, maior será o seu período de revolução em torno do Sol.

(32) No caso especial da Terra, a órbita é exatamente uma circunferência.

## Solução

(01) Verdadeira – a lei das Áreas de Kepler

(02) Verdadeira – segundo a Terceira Lei de Kepler os períodos dependem apenas das distâncias dos planetas ao Sol, os períodos aumentam conforme a distância aumenta.

(04) Falsa – Como dito anteriormente, os períodos independem das massas.

(08) verdadeira – Para cada um deles, mudam as excentricidades das elipses e os semieixos maiores.

(16) Falsa – Os movimentos de rotação e translação são independentes.

(32) Falsa – Apesar de muito pequenas, existe uma excentricidade na órbita terrestre.

### 1. Força de Atração Gravitacional:

- Direção: da reta que une as duas partículas;
- Sentido: sempre atrativo;
- Intensidade:  $F_G = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$

### 2. Primeira Lei de Kepler – Lei das Órbitas:

“As trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.”

### 3. Segunda Lei de Kepler – Lei das Áreas:

“Enquanto os planetas se movem em torno do sol, o raio vetor varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.”

### 4. Terceira Lei de Kepler – Lei dos Períodos:

“A razão entre o quadrado do período e o cubo do raio médio (distância entre o corpo que orbita e o corpo central) é uma constante.”

$$\frac{T^2}{r^3} = K_p$$

### 5. Velocidade dos Objetos em Órbita:

$$v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}}$$

### 6. Newton e a Lei dos Períodos de Kepler:

$$K_p = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

### 7. Período de Rotação de um Satélite:

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_P}}$$

8. Satélites Geoestacionários: Um satélite geoestacionário é aquele que acompanha o movimento de rotação da Terra. Visto do nosso planeta está sempre estacionário em relação a ele. Desta forma o período de rotação do satélite é igual ao período de rotação de nosso planeta em torno do próprio eixo, isto é, 24 h. Os satélites geoestacionários geralmente são utilizados em comunicação com raio orbital aproximadamente igual a 42.000 km.

## Exercícios do Capítulo 8

1. (FUVEST-SP) A Estação Espacial Internacional, que está sendo construída num esforço conjunto de diversos países, deverá orbitar a uma distância do centro da Terra igual a 1,05 do raio médio da Terra. A razão  $R = F/F_e$ , entre a força  $F_e$  com que a Terra atrai um corpo nessa Estação e a força  $F$  com que a Terra atrai o mesmo corpo na superfície da Terra, é aproximadamente de:

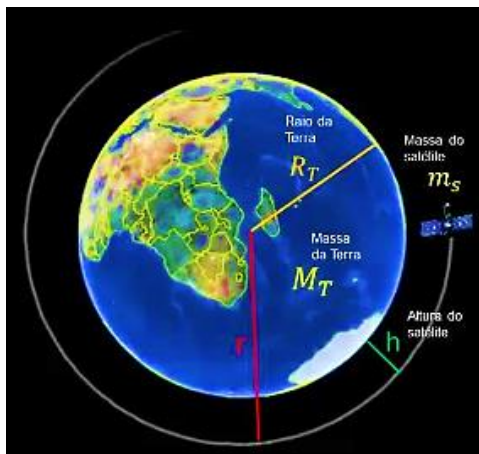


Fonte: pt Wikipédia.org

2. (UNICAMP-SP) Um míssil é lançado horizontalmente em órbita circular rasante à superfície da Terra. Adote o raio da Terra  $R = 6400 \text{ km}$  e, para simplificar, tome 3 como valor aproximado de  $g$ . a) Qual é a velocidade de lançamento? b) Qual é o período da órbita?

3. (CEFET-PR) Dois satélites artificiais giram em torno da Terra em órbitas de mesma altura. O primeiro tem massa  $m_1$ , e o segundo, massa  $3m_1$ . Se o primeiro tem período de 6 h, o período do outro será, em horas, igual a:

4. (INATEL-MG) Um satélite permanece em órbita circular terrestre de raio  $r$  com velocidade tangencial  $v$ . Qual deverá ser a velocidade tangencial desse satélite para permanecer em órbita circular lunar de mesmo raio  $r$ ? Considere a massa da Lua 81 vezes menor que a da Terra.



5. (UFRJ) A tabela abaixo ilustra uma das leis do movimento dos planetas: a razão entre o cubo da distância  $D$  de um planeta ao Sol e o quadrado do seu período de revolução  $T$  em torno do Sol é constante. O período é medido em anos e a distância em unidades astronômicas (UA). A unidade astronômica é igual à distância média entre o Sol e a Terra. Suponha que o Sol esteja no centro comum das órbitas circulares dos planetas. Um astrônomo amador supõe ter descoberto um novo planeta no sistema solar e o batiza como planeta X. O período estimado do planeta X é de 125 anos. Calcule: a) a distância do planeta X ao Sol em UA b) a razão entre a velocidade orbital do planeta X e a velocidade orbital da Terra.

Planeta	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno
$T^2$	0,058	0,378	1,00	3,5	141	868
$D^3$	0,058	0,378	1,00	3,5	141	868

6. (FUVEST-SP) Estamos no ano de 2095 e a “interplanetariamente” famosa FIFA (Federação Interplanetária de Futebol Amador) está organizando o Campeonato Interplanetário de Futebol, a se realizar em Marte no ano 2100. Ficou estabelecido que o comprimento do campo deve corresponder à distância do chute de máximo alcance conseguido por um bom jogador. Na Terra esta distância vale  $L_T = 100$  m. Suponha que o jogo seja realizado numa atmosfera semelhante à da Terra e que, como na Terra, possamos desprezar os efeitos do ar, e ainda, que a máxima velocidade que um bom jogador consegue imprimir à bola seja igual à na Terra. Suponha que  $M_M / M_T = 0,1$  e  $R_M / R_T = 0,5$ , onde  $M_M$  e  $R_M$  são a massa e o raio de Marte e  $M_T$  e  $R_T$  são a massa e raio da Terra.

- a) Determine a razão  $g_M/g_T$  entre os valores da aceleração da gravidade em Marte e na Terra.
- b) Determine o valor aproximado  $L_M$ , em metros, do comprimento do campo em Marte.
- c) Determine o valor aproximado do tempo  $t_M$ , em segundos, gasto pela bola, em um chute de máximo alcance, para atravessar o campo em Marte (adote  $g_T = 10 \text{ m/s}^2$ ).

7. (FUVEST-SP) Um anel de Saturno é constituído por partículas girando em torno do planeta em órbitas circulares. a) Em função da massa  $M$  do planeta, da Constante da Gravitação Universal  $G$  e do raio de órbita  $r$ , calcule a intensidade da velocidade orbital de uma partícula do anel. b) Sejam  $R_i$  o raio interno e  $R_e$  o raio externo do anel. Qual a razão entre as velocidades angulares  $\omega_i$  e  $\omega_e$  de duas partículas, uma da borda interna e outra da borda externa do anel?

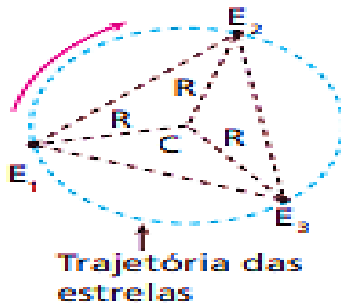
8. (FUVEST-SP) Se fosse possível colocar um satélite em órbita rasante em torno da Terra, o seu período seria  $T$ . Sendo  $G$  a Constante de Gravitação universal, expresse a massa específica média (densidade média) da Terra em função de  $T$  e  $G$ .

9. (FUVEST-SP) Um satélite artificial em órbita circular em torno da Terra mantém um período que depende de sua altura em relação à superfície terrestre.

**Note e adote:** Raio da Terra:  $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$  Intensidade da aceleração da gravidade nas proximidades da Terra:  $g = 10 \text{ m/s}^2$

Desprezando-se os efeitos da atmosfera e adotando-se  $\pi = 3$ , determine: a) o período  $T_0$  do satélite, em minutos, quando sua órbita está muito próxima da superfície, ou seja, quando está a uma distância do centro da Terra praticamente igual ao raio do planeta; b) o período  $T_1$  do satélite, também em minutos, quando sua órbita está a uma distância do centro da Terra aproximadamente igual a quatro raios terrestres.

10. (Olimpíada Ibero-american de Física) Uma estrela tripla é formada por três estrelas de mesma massa  $M$  que gravitam em torno do centro de massa  $C$  do sistema. As estrelas estão localizadas nos vértices de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência que corresponde à trajetória por elas descrita, conforme ilustra a figura.

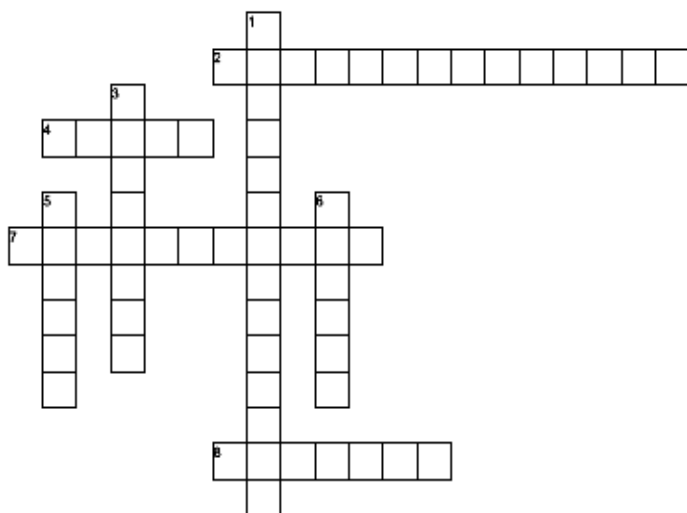


Considerando-se como dados a massa  $M$  de cada estrela, o raio  $R$  da circunferência que elas descrevem e a constante de gravitação universal  $G$ , determine o período  $T$  no movimento orbital de cada estrela.

Com base em seus conhecimentos sobre O Movimento de Planetas e Satélites, preencha as lacunas abaixo:

# Movimento

## Planetas e Satélites



### Horizontal

2. independente da massa do próprio satélite.
4. Enquanto os planetas se movem em torno do sol, o raio vetor varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais.
7. independente de sua massa, dependendo apenas da massa do corpo central e raio de sua órbita.
8. As trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da elipse.

### Vertical

1. aquele que acompanha o movimento de rotação da Terra.
3. A razão entre o quadrado do período e o cubo do raio médio é uma constante.
5. Deduziu as leis do movimento planetário.
6. Provou que corpos de formas esféricas se atraem com o mesmo tipo de força.

## Lista de Figuras

Figura 1. 1 – Aristóteles. ....	11
Figura 1. 2 - Galileu Galilei.....	12
Figura 1. 3 - Princípios Matemáticos de Filosofia Natura .....	12
Figura 1. 4 - Isaac Newton. ....	12
Figura 1. 5 - Trajetória descrita pelo ponto objeto P e o sentido do seu movimento com relação ao observador situado em O. ....	13
Figura 1. 6 - Representação do Vetor Deslocamento $\Delta r$ . ....	14
Figura 1. 7 - Comprimento do vetor $\Delta r$ . ....	15
Figura 1. 8 - Velocidade vetorial média da partícula, com relação ao observador O.....	16
Figura 1. 9 - Trajetória da partícula P e três pontos, A, B e C, na mesma, onde desenhamos os vetores velocidade $v_1$ , $v_2$ e $v_3$ , respectivamente. ....	19
Figura 1. 10 - Ilustração do ponto fixo P a medida que pontos ficam mais próximos de P, o deslocamento vetorial tende à reta tangente à curva em P. ....	20
Figura 1. 11 - Velocidade vetorial instantânea.....	20
Figura 1. 12 - Trajetória retilínea.....	21
Figura 1. 13 - Bola lançada perpendicularmente contra uma parede. ....	22
Figura 1. 14 - Satélite que está sendo colocado em órbita e a Terra.....	22
Figura 1. 15 - Lançamento de ônibus espacial. ....	23
Figura 1. 16 - Ônibus se desloca em linha reta com velocidade constante $v$ . Todos os objetos e corpos no seu interior possuem a mesma velocidade vetorial, inclusive os passageiros.....	25
Figura 1. 17 - Passageiro, se desloca para frente tentando preservar a mesma velocidade vetorial que possuía antes da frenagem do ônibus.....	26
Figura 1. 18 - O motorista acelera para frente o ônibus no instante que possuía a velocidade vetorial $v$ , o passageiro é lançado para trás, tentando resistir a essa variação de velocidade.....	26
Figura 1. 19 - Uma bola repousa sobre um pequeno pedaço de madeira que a impede de cair no interior de um copo.....	26
Figura 1. 20 - De repente alguém puxa rapidamente o pedaço de madeira e a bola cai no interior do copo. ....	26
Figura 1. 21 - Forças sobre uma partícula. ....	27
Figura 1. 22 - Par de forças ação e reação. ....	29
Figura 1. 23 - Forças que atuam sobre uma bola em repouso.....	30
Figura 1. 24 – (Imagem ao lado direito) Força $F$ comprime o bloco de massa M contra uma parede de tijolos.....	31
Figura 1. 25 - Duas superfícies estão em contato. ....	32
Figura 1. 26 - Ação de forças sobre um bloco em uma superfície horizontal. 33	
Figura 1. 27 - Operador puxa um fio que está conectado a um carrinho. ....	36
Figura 1. 28 - Representação do movimento acelerado e retardado. ....	37

Figura 1. 29 - Orientação quanto ao sinal da velocidade em uma trajetória retilínea.....	38
Figura 1. 30 - Gráfico $v$ versus $t$ .....	38
Figura 2. 1 - Representação do Campo Gravitacional Uniforme.....	55
Figura 2. 2 - Representação do lançamento vertical (a), lançamento horizontal (b) e lançamento oblíquo (c). ....	56
Figura 2. 3 - Sentido da velocidade no lançamento vertical. ....	57
Figura 2. 4 - Trajetória para cima e observemos o corpo durante a subida e a descida. ....	58
Figura 2. 5 - Partícula de massa $m$ lançada horizontalmente, com velocidade inicial $v_0$ , da borda de uma mesa de altura $H$ (relativamente ao solo) numa região de campo gravitacional uniforme $g$ . ....	63
Figura 2. 6 - Força peso atua sobre a partícula puxando-a em direção ao solo, desviando a partícula da trajetória sem gravidade. ....	64
Figura 2. 7 - Movimento parabólico. ....	66
Figura 2. 8 - Partícula lançada obliquamente num campo gravitacional uniforme. ....	69
Figura 2. 9 - Altura máxima $H_{\text{máx}}$ à coordenada $y$ do vértice da parábola e chamamos de alcance $R$ a distância horizontal entre o ponto de lançamento da partícula e de aterrissagem da mesma, situados no mesmo nível vertical. ....	71
Figura 2. 10 - Partículas que possuem carga elétrica são lançadas no interior de um campo elétrico uniforme, como aquele produzido por um capacitor de placas paralelas de grandes dimensões.....	72
Figura 3. 1 - Agulha magnética nas proximidades de um ímã. ....	81
Figura 3. 2 - Ímãs artificiais. ....	82
Figura 3. 3 - Se um ímã for quebrado em duas partes, cada uma continuará tendo os dois polos norte e sul. ....	82
Figura 3. 4 - Em (a) nenhuma corrente passa pelo fio ( $I = 0$ ) e a bússola não sofre nenhum desvio, permanecendo paralela ao fio. Em (b) e em (c) uma corrente circula no fio e a agulha da bússola sofre desvio, para um lado e para o outro. ....	83
Figura 3. 5 - Se a carga for positiva com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético,.....	85
Figura 3. 6 - Se a carga for negativa, o procedimento é o mesmo, com a palma da mão aberta, aponte o polegar no sentido da velocidade e os dedos restantes no sentido do campo magnético. ....	85
Figura 3. 7 - Convenção para o campo saindo da página e campo entrando na página.....	87
Figura 3. 8 - As linhas de indução magnética de um campo uniforme.....	87

Figura 3. 9 - Placa horizontal plana com um pequeno furo e um fio retilíneo passando por esse furo, perpendicular ao plano da placa. ....	88
Figura 3. 10 - Regra prática para descobrir a orientação das linhas de indução chamada regra da mão direita. ....	88
Figura 3. 11 - Espira circular, na qual circula uma corrente elétrica de intensidade $i$ . ....	90
Figura 3. 12 - O sentido das linhas de indução no centro da espira é sempre perpendicular ao plano da espira. ....	91
Figura 3. 13 - Solenoide. ....	91
Figura 3. 14 - Corrente elétrica passando por um solenoide. ....	92
Figura 3. 15 - Linhas de indução no solenoide. ....	92
Figura 3. 16 – O galvanômetro mostra nenhuma corrente no circuito. ....	94
Figura 3. 17 - Ímã se aproxima do solenoide com velocidade $v$ uma corrente é induzida no circuito constituído pelo solenoide e pelo galvanômetro. ....	94
Figura 3. 18 - As linhas do campo $B$ geradas pelo ímã de barra que, como sabemos, nascem no polo norte e morrem no polo sul. ....	95
Figura 3. 19 - Ímã se aproxima do solenoide com velocidade $v$ um maior número de linhas do campo atravessará a área da seção transversal do solenoide. ....	95

Figura 4. 1 - Partícula de massa $m$ em repouso sobre uma mesa horizontal muito longa e perfeitamente lisa. ....	104
Figura 4. 2 - Gráfico $FEl$ versus $x$ . ....	111
Figura 4. 3 - Gráfico da energia potencial elástica. ....	112
Figura 4. 4 - Sistema conservativo formado pelas forças $F1, F2, F3$ e $F4$ . ....	113
Figura 4. 5 - Representação do trabalho em trajetórias diferentes. ....	114

Figura 5. 1 - Partícula lançada obliquamente em relação ao campo $B$ . ....	128
Figura 5. 2 – Movimento helicoidal. ....	129
Figura 5. 3 - Partícula $P$ se movendo ao longo de uma circunferência de raio $r$ no sentido anti-horário, com velocidade vetorial de intensidade $v$ . ....	130

Figura 6. 1 - Função de $A$ em $B$ . ....	146
Figura 6. 2 - Representação gráfica da função crescente e função decrescente. ....	147
Figura 6. 3 - Representação gráfica da função constante. ....	148
Figura 6. 4 - Representação gráfica da função do segundo grau. ....	150
Figura 6. 5 - Representação gráfica do movimento progressivo e do movimento retrógrado. ....	150
Figura 6. 6 - O gráfico da aceleração neste movimento também é o gráfico da função constante: $a = 0$ . ....	151
Figura 6. 7 - Gráfico da aceleração escalar. ....	154
Figura 6. 8 – Gráfico da aceleração constante. ....	154

Figura 6. 9 - Representação gráfica do (a) movimento acelerado e do (b) movimento retardado. ....	157
Figura 6. 10 - A linha vermelha no gráfico mostra a velocidade média no exemplo acima. A linha vermelha mostra a velocidade.....	161
Figura 6. 11 - Os diagramas para aceleração positiva ( $a > 0$ ) e negativa ( $a < 0$ ) .....	163
Figura 7. 1 - Bloco de massa $m$ que se move com velocidade $V_0$ é empurrado sobre uma mesa lisa pela ação de uma força constante $F$ em intensidade direção e sentido. ....	171
Figura 7. 2 – Sistemas com duas partículas. ....	179
Figura 7. 3 - Colisão entre duas bolas rígidas. ....	182
Figura 7. 4 – Colisão frontal.....	183
Figura 7. 5 – Colisão não frontal.....	183
Figura 7. 6 - Colisão unidimensional.....	183
Figura 7. 7 – Colisão perfeitamente elástica.....	185
Figura 8. 1 – Partículas de massas $m_1$ e $m_2$ separadas por uma distância $d$ se atraindo, sendo $F_{12}$ e $F_{21}$ , as intensidades das forças da partícula 1 sobre a 2 e 2 sobre a 1. ....	197
Figura 8. 2 - O modelo atual do nosso sistema planetário é devido à Nicolau Copérnico. ....	199
Figura 8. 3 - Ilustração que representa o planeta (P) girando em torno do Sol com este ocupando um dos focos (F).....	200
Figura 8. 4 - Representação do Afélio e do Periélio em relação ao Sol. ....	200
Figura 8. 5 - O raio vetor é a reta imaginária que liga em cada instante o centro do planeta e o centro do Sol. Ele aparece como uma seta em vermelho na figura. ....	202
Figura 8. 6 - Lançamento de objetos feito por um canhão idealizado por Newton. ....	205
Figura 8. 7 - Interação gravitacional entre a Terra e a Lua era a força responsável pela resultante centrípeta sobre a Lua. ....	205
Figura 8. 8 - A aceleração da Lua enquanto orbita em torno da Terra.....	208
Figura 8. 9 - A aceleração da queda dos corpos nas proximidades da superfície terrestre. ....	208