



MNPEF
Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



UFAM

EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA

LELYZ SANTOS

MANAUS - AM

2021

LELYZ SANTOS

EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA

Dissertação apresentada ao Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, polo 04, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas e Universidade Federal do Amazonas, como requisito obrigatório para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Física.

Orientador: Prof. Dr. Octávio D. Rodriguez Salmon.

MANAUS – AM

2021

MODELO de FICHA CATALOGRÁFICA

SANTO, Lelyz

Explorando a Física na Música / Lelyz Santos – Amazonas: UFAM / IFAM, 20201.

109 f.

Orientador: Octávio D. Rodriguez Salmon

Dissertação (mestrado) – UFAM / IFAM / Instituto de Física / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física, 2011.

1. Física e Música. 2. Sequência Didática. 3. Experimento de baixo custo. 4. Equação de Onda. 5. Fourier e Música. I Salmon, Octávio D. Rodrigues. II Universidade federal do Amazonas, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. III. Explorando a Física na Música

EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA

Lelyz Santos

Orientador:

Prof. Dr. Octávio D. Rodriguez Salmon

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação Polo 04 IFAM/UFAM do Curso de Mestrado Profissional de Ensino de física (MNPEF), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Física

Aprovada por:

Dr. Octavio Daniel Rodriguez Salmon (presidente, UFAM)

Dr. Thiago Lobo Fonseca (membro externo, IFRJ)

Dr. Minos Martins Adão Neto (membro interno, UFAM)

MANAUS – AM

2021

Dedico primeiramente este trabalho à Deus pelo fôlego de vida.

Dedico este trabalho aos meus pais que me deram a vida bem como educação e apoio total em toda a minha trajetória.

Dedico também a minha esposa por ser minha fiel companheira, apoiadora que traz iluminação ao nosso lar.

Dedico finalmente à Ana Luiza e à Ana Clara que sempre trazem alegrias e bons sentimentos ao lar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo fôlego de vida e por todos os benefícios que me tem feito;

Agradeço aos meus pais por serem os meus primeiros professores;

Agradeço a minha esposa por me tornar uma pessoa melhor a cada dia;

Agradeço Ao meu orientador Prof. Dr. Octávio D. Rodriguez por ter tido paciência e compreensão com o momento em que vivi ;

Aos professores do curso MNPEF polo 04;

A Capes e a SBF pela oportunidade que me deram de poder cursar o mestrado.

“Por isso mesmo, empenhem-se para acrescentar à sua fé a virtude; à virtude o conhecimento; ao conhecimento o domínio próprio; ao domínio próprio a perseverança; à perseverança a piedade; à piedade a fraternidade; e à fraternidade o amor.”

2ª Pedro 1:5-7

RESUMO

O presente trabalho propõe uma sequência didática juntamente com um experimento de baixo custo fazendo uma interdisciplinaridade com a música. A aplicação do produto foi em uma turma noturna do 2º ano do EJA (Educação de Jovens e Adultos) no período de novembro de 2021 durante a pandemia do COVID-19, após retomada das aulas presenciais autorizada pelo governo do Estado do Amazonas, depois de dezoito meses de aulas presenciais suspensas. Traz a relação da música com os sons através de intervalos, harmonia e demais musicalidades. O trabalho terá Ausubel como um dos fundamentos pedagógicos para o ensino-aprendizagem significativa. Terá uma boa base teórica e os fundamentos matemáticos e físicos para sustentar as propostas sugeridas aos professores do ensino médio para aplicarem com facilidade aos alunos, pois não precisará de laboratórios, apenas boa vontade. Por fim o principal objetivo é que de alguma forma contribua para a sociedade brasileira; física; professore/educadores e a comunidade científica.

Palavra-Chave: Física e Música, sequência didática, Experimento de baixo custo, Experimento de Harmônicos, Equação de onda, Fourier e música.

ABSTRACT

The present work proposes a didactic sequence together with a low-cost experiment making an interdisciplinarity with music. The application of the product was in a night class of the 2nd year of EJA (Youth and Adult Education) in the period November 2021 during the COVID-19 pandemic, after resumption of face-to-face classes authorized by the government of the State of Amazonas, after eighteen months of face-to-face classes suspended. It brings the relationship between music and sounds through intervals, harmony and other musicalities. The work will have Ausubel as one of the pedagogical foundations for meaningful teaching and learning. It will have a good theoretical basis and the mathematical and physical foundations to support the proposals suggested to high school teachers to easily apply to students, as it will not need laboratories, only good will. Finally, the main objective is to somehow contribute to Brazilian society; physics; teacher/educators and the scientific community.

Keywords: Physics and Music, Didactic Sequence, Low Cost Experiment, Harmonics Experiment, Wave Equation, Fourier and music.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1.....	68
Gráfico 2.....	68
Gráfico 3.....	68
Gráfico 4.....	69
Gráfico 5.....	69
Gráfico 6.....	70
Gráfico 7.....	70
Gráfico 8.....	70
Gráfico 9.....	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 função $y = h(t)$	25
Figura 2 propagação de ondas.....	27
Figura 3 pulso realizado por uma mola	28
Figura 4 Direção de propagação da onda	28
Figura 5 Vale e crista da onda.....	29
Figura 6 Comprimento de onda.....	29
Figura 7 Função de onda	30
Figura 8 Pequeno elemento de corda tensionado.....	35
Figura 9 Interferência de onda	39
Figura 10 Superposição da onda	41
Figura 11 Ondas estacionárias.....	42
Figura 12 Harmônicos da onda	44
Figura 13 Teclas brancas representando a escala diatônica no piano.....	50
Figura 14 Série Harmônica da nota dó.....	51
Figura 15 Corte da tela do simulador componente de Fourier com 7 harmônicos	53
Figura 16 Expansão matemática da onda resultante	53
Figura 17 Timbre de cada instrumento.....	54
Figura 18 foto do protótipo desenvolvido	55
Figura 19 1º Harmônico: a esquerda a indicação no protótipo e a direita a tela do PC com a frequência de 65 Hz.....	56
Figura 20 2º Harmônico.....	57
Figura 21 3º Harmônico.....	57
Figura 22 Densidade linear da corda Mi do violão e da corda Mi da guitarra.....	59
Figura 23 Afinador tipo clip.....	60
Figura 24 aplicação do projeto aula 1	62
Figura 25 aplicação do projeto aula 2	63
Figura 26 aplicação do projeto juntamente com o experimento de baixo custo aula 3	64

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 Justificativa	13
1.2 Objetivos Gerais	14
1.3 Objetivos Específicos	14
1.4 Plano da Dissertação	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1 Aprendizagem Significativa	16
2.2 Interdisciplinaridade	18
3 CONCEITOS MATEMÁTICOS E FÍSICOS	20
3.1 Série de Fourier	20
3.2 Ondas	26
3.3 Física e música	48
3.4 Série Harmônica	50
4 EXPERIMENTO DE BAIXO CUSTO	55
4.1 Metodologia e Desenvolvimento	55
5 DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO: EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA	61
5.1 Aplicação em sala de aula	61
6 ANÁLISE DOS RESULTADOS	67
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	74
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	75
ANEXO 1	79
APÊNDICES	82

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo propor uma sequência didática juntamente com um equipamento para fazer um experimento com fácil manuseio e baixo custo como recurso didático pedagógico para o ensino de fenômenos ondulatórios. Devido à simplicidade da montagem ela poderá ser facilmente reproduzida não apenas para uso em sala de aula, mas em qualquer ambiente.

O presente tema foi escolhido, com a intenção de explorar os conteúdos de ondulatória e acústica, tendo como base a interdisciplinaridade juntamente com a música, com a finalidade despertar a vontade de aprender o assunto, aproveitando-se do interesse que as pessoas têm de modo natural pela música, podendo assim compreender os fenômenos naturais e físicos envolvidos.

Concebe-se a sequência didática em quatro aulas/hora: a primeira será de modo teórico e expositivo; a segunda será igual à primeira; a terceira será uma aula com o experimento de baixo custo e a última será de aplicação de exercícios.

A escolha deste tema é recorrente da minha experiência musical aliada aos estudos como licenciando no curso de Física. Há cerca de 15 anos, no interior de São Paulo, em Lorena, comecei a aprender o instrumento musical denominado trompa. Instrumento de sopro, da classe dos metais. O timbre da trompa é o que possui o maior número de harmônicos na sua formação sonora.

Passados alguns anos ingressei na Força Aérea Brasileira (FAB) como músico e, aproximadamente, dez anos sirvo na Banda de Música da Base Aérea de Manaus. Nesta função, percebi ainda mais a intimidade que existe entre a música e a física e como uma pode auxiliar a outra quando se fala em educação.

Minha experiência como músico facilitou grandemente minha compreensão em assuntos da física relacionados à ondulatória e particularmente em acústica, logo pude assimilar de forma mais fácil teorias e explicações desenvolvidas e apresentadas no curso.

Diante disso, fica evidente que a experiência exposta serviu de motivação para a escolha do tema. Apropriando-se da Música como uma ferramenta para exemplificar teorias Físicas de modo simplificado, facilitando a compreensão para os educadores e alunos.

Sendo assim, o trabalho relaciona os conteúdos de ondas e acústica de modo interdisciplinar ou ainda, a partir da música, o que pode ser um atrativo a mais para quem ensina e para quem aprende Física.

Em sala de aula, em geral percebe-se um distanciamento dos alunos de Física do ensino médio no que se refere à parte experimental da disciplina e contraditoriamente no dia a dia a Física está presente na maioria das tarefas, porém, muitos não conhecem as bases científicas e suas aplicações no cotidiano.

Esse distanciamento entre o que se ensina na escola e o dia a dia dos estudantes é um dos fatores que tem afastado cada vez mais os indivíduos da escola. Por outro lado muitos docentes de modo equivocado julgam que apenas aulas demonstrativas são suficientes para atender a demanda “experimentação”, como se o verbo experimentar estivesse ligado à mera observação. Paulo Freire (1996) nos alerta para este equívoco em seu livro “Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática docente” quando afirma:

...ensinar não é transferir conhecimento não apenas precisa de ser apreendido por ele (professor) e pelos educandos nas suas razões de ser ontológica, política, ética, epistemológica, pedagógica, mas também precisa de ser constantemente testemunhado, vivido. (FREIRE, cap 2,p.47).

1.1 Justificativa

O aluno que internalizar os conceitos de ondulatória e a produção de harmônicos possibilitará a ele ampliar de modo significativo a sua visão musical nesta temática, permitindo-a alinhar a prática musical com a teoria Física acarretando em um maior arcabouço didático.

O conhecimento prático através da manipulação de um instrumento relacionado ao conhecimento científico de harmônicos e de ondulatória traz ao músico um enriquecimento e uma postura diferenciada no que tange a sua atuação. Isso se dá, por exemplo, durante o aprendizado de um instrumento que todo músico estuda arpejo. Quando o aluno aprende na Física dos harmônicos ele compreende melhor os estudos dos arpejos e assim consegue compreender o motivos dos músicos almejarem a ter um som mais robusto e até mais afinado.

Logo o estudo é importante para compreender a natureza, podendo assim a partir de um experimento simples despertar o interesse alunos e demais pessoas compondo um panorama de maior divulgação da ciência, podendo compreender

desde o comportamento da luz até mesmo fenômenos correlacionados à Mecânica Quântica, como a dualidade onda-partícula.

Outra relevância do presente trabalho é que a funcionalidade do equipamento elaborado não requer geradores de frequência que em geral são equipamentos de alto custo, mas pode se dar pelo uso de softwares gratuitos que transformam a saída de áudio de computadores/notebooks nestes geradores. Outro aspecto ainda mais relevante é que com a ampliação do uso de smartphones e/ou tablets existe hoje uma infinidade de aplicativos que transformam a saída de áudio destes dispositivos também em geradores de frequência variável. Isto amplia ainda mais o leque de opções e facilita o acesso ao experimento a outros espaços abertos, fora do ambiente escolar também.

Por fim, este trabalho tem pretensão de atrair aquele aluno que gosta ou tem afinidade com a música.

1.2 Objetivos Gerais

Propor um material didático de apoio para uma turma do 2º ano do ensino Médio, visando a interdisciplinaridade da física com a música, explorando assim um tema em comum aos dois assuntos, a acústica, juntamente com um experimento de baixo custo.

1.3 Objetivos Específicos

- Estudar e compreender ondulatória.
- Conhecer conceitos físicos da acústica (timbre, intensidade, altura e etc.)
- Possibilitar em trabalhos futuros um aperfeiçoamento deste produto.

1.4 Plano da Dissertação

A dissertação é composta de 7 capítulos e 1 Apêndice, sendo estruturado da seguinte maneira:

O Capítulo 1, Introdução apresenta a justificativa e relevância do estudo, motivações do trabalho, objetivo geral, objetivo específicos e a estruturação do presente trabalho.

O Capítulo 2, Fundamentação Teórica, apresenta a Teoria de aprendizagem significativa de Ausubel e a importância da interdisciplinaridade atrelada à música.

O Capítulo 3 apresenta os conceitos físicos de ondulatória e acústica, dando boa base de subsidio para o tema de ondulatória, com uma parte aplicada à música.

O Capítulo 4 contém o experimento de baixo custo, método para sua confecção e sua aplicação extraindo dados do experimento.

O Capítulo 5 apresenta a aplicação da sequência didática em sala de aula, bem como a descrição de como foi aplicado.

O Capítulo 6 contém a coleta e análise de dados sobre o projeto aplicado e comentários sobre os dados

O Capítulo 7, considerações finais sobre o trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O trabalho irá fundamentar-se em dois fatores principais: Aprendizagem significativa de Ausubel, que envolve a absorção de novos significados a partir dos materiais de aprendizagem apresentados; e na interdisciplinaridade com a música. Iremos trabalhar com os conceitos em harmonia com a sequência didática e o experimento de baixo custo.

Tem-se a proposta de uma sequência didática, a aprendizagem do aluno será uma consequência. O resultado desta sequência juntamente com o experimento de baixo custo, será o motivo geral deste trabalho.

2.1 Aprendizagem Significativa

É muito comum o pensamento entre alguns professores que em uma aula teórica ou apenas expositiva os alunos não aprendem nada, pois estão aprendendo de modo passivo. No entanto para a psicologia da educação cognitivista, abordada no livro Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva de Ausubel, 2003, ele destaca o que se entende por aprendizagem significativa:

Contrariamente a convicções expressas em muitos âmbitos educacionais, a aprendizagem por recepção verbal não é necessariamente memorizada ou passiva (tal como o é frequentemente na prática educacional corrente), desde que se utilizem métodos de ensino expositivos baseados na natureza, condições e considerações de desenvolvimento que caracterizam a aprendizagem por recepção significativa. (AUSUBEL, 2003).

Para os cognitivistas pode-se inferir que aulas expositivas não são meras aulas que os alunos apreendem passivamente, ou que as aulas assim ficaram no passado, cabe ao professor procurar encontrar o assunto ministrado com algum aspecto na natureza e a partir daí explorar em suas aulas os conceitos específicos.

A aprendizagem por recepção significativa é, por inerência, um processo ativo, pois exige, no mínimo: (1) o tipo de análise cognitiva necessária para se averiguarem quais são os aspectos da estrutura cognitiva existentes mais relevantes para o novo material potencialmente significativo; (2) algum grau de reconciliação com as ideias existentes na estrutura cognitiva – ou seja, apreensão de semelhanças e de diferenças e resolução de contradições reais ou aparentes entre conceitos e proposições novos e já enraizados; e (3) reformulação do material de aprendizagem em termos dos antecedentes intelectuais idiossincráticos e do vocabulário do aprendiz em particular. (AUSUBEL, 2003).

A aprendizagem significativa é uma teoria de aprendizagem em que o novo conteúdo deve estar relacionado ao conhecimento prévio do aluno, também conhecido como subsunçor. O subsunçor é uma estrutura concreta pela qual novas informações podem ser introduzidas no cérebro humano, que é altamente organizado e possui uma hierarquia conceitual para armazenar as experiências anteriores do aluno (MOREIRA, 1983, p. 62).

Daí o motivo de escolhermos tal sequência didática juntamente com a teoria de aprendizagem significativa, pois além de subsidiar a parte teórica expositiva, irá fundamentar a parte experimental do trabalho.

A utilização de experimentos para aprender Física se caracteriza como essencial na medida em que desperta o interesse dos estudantes em repetir um modelo e atingir objetivos, conforme Moraes (2000, p.239) os alunos que acompanham suas aulas teóricas com suporte experimental, apresentam melhores índices de aprendizagem.

É muito comum muitos alunos se sentirem desmotivados em aprender algumas matérias, pois sempre comentam que nunca irão usar tais conceitos em suas vidas. A verdade é que, em parte, isso acontece pela falta de transposição daquilo visto no livro didático para o mundo real, e a experimentação pode ajudar nisso, como dizem Séré, Coelho e Nunes (2003, p.39), então entendemos como as atividades experimentais enriquecem os alunos, pois dão sentido real ao mundo abstrato e à forma da linguagem. Ainda conforme Séré et al (2003, p. 38-39), a prática experimental fortalece o aprendizado a medida em que para desvendar um fenômeno físico é necessária ainda mais teoria.

As aplicações experimentais trazem a possibilidade de mostrar a Física do mundo real, longe da abstração e idealidade que preenchem os livros didáticos em que muitas variáveis opostas são desprezadas. Ainda que sejam simples e direto na sala de aula, essas práticas têm a capacidade buscar a realidade vivida por aquele grupo, podendo muitas vezes despertar interesses e investigações, como pontuam Gaspar e Monteiro:

A atividade de demonstração experimental em sala de aula, particularmente quando relacionada a conteúdos de Física, apesar de fundamentar-se em conceitos científicos, formais e abstratos, tem por singularidade própria a ênfase no elemento real, no que é diretamente observável e, sobretudo, na possibilidade simular no micro-cosmo formal da sala de aula a realidade informal vivida pela criança no seu mundo exterior. (GASPAR, 2005, p.232).

Uma grande dificuldade quanto à prática experimental é a falta de estrutura em muitas escolas do país o que acaba por desmotivar os professores, em alguns casos a oportunidade de tal meio só ocorre com a extrema força de vontade do profissional em construir seus próprios experimentos com materiais alternativos. Axt e Moreira (1991, P.99) expressam pesar ao afirmarem o não constrangimento dos docentes a manufaturarem esses materiais que são de responsabilidade das autoridades e sociedade, porém afirmam que esses mesmos não podem esperar parados até que a escola adquira materiais e laboratórios, esses percalços podem ser superados com coleta de materiais disponibilizados na sociedade envolvendo alunos e comunidade escolar.

Em harmonia com o exposto, Araújo e Abib (2003, p.176) contribuem ao concluir que o uso de atividades experimentais é considerada uma das maneiras mais bem-sucedidas de reduzir as dificuldades de aprendizagem e ensinar física de uma forma significativa e consistente.

2.2 Interdisciplinaridade

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a interdisciplinaridade é baseada em:

“na crítica de uma concepção de conhecimento que toma a realidade como um conjunto de dados estáveis, sujeitos a um ato de conhecer isento e distanciado” (BRASIL, p.29-30, 1998).

Os PCNs também indagam sobre o fracionamento entre as diferentes disciplinas do currículo isolando-as uma das outras, sem levarem em conta as relações que uma tem com a outra.

As proposições sobre interdisciplinaridade aqui apontadas são importantes, pois tratam de questões de diversas áreas do conhecimento e a ligação entre elas, por isso estamos de acordo com BRASIL(2000) :

A interdisciplinaridade deve ser compreendida a partir de uma abordagem relacional, em que se propõe que, por meio da prática escolar, sejam estabelecidas interconexões e passagens entre os conhecimentos através de relações de complementaridade, convergência ou divergência.

As especificidades das áreas de estudo são aproveitadas na interdisciplinaridade, pois as ligações estabelecidas são mais livres e menos normativas. É de suma importância que se introduza diferentes conteúdos aos alunos em atividades interdisciplinares, a fim de criar oportunidades, observações,

percepções, aprendizagem e comparações, relacionando os tópicos apresentados. Por isso entendemos que a interdisciplinaridade é uma forma para enraizar os conceitos físicos por meio da música.

Ainda conforme os PCNs (BRASIL, 2000, p. 75), “será principalmente na possibilidade de relacionar as disciplinas em atividades ou projetos de estudo, pesquisa e ação que a interdisciplinaridade poderá ser uma prática pedagógica e didática adequada”

3 CONCEITOS MATEMÁTICOS E FÍSICOS

3.1 Série de Fourier

De acordo com PRADO (2010, p. 20), desenvolveu-se uma série de relações entre a física, matemática e a música. Mersenne e Galileo separadamente desenvolvem experimentos que levam a uma lei que estabelece conexões entre a tensão de uma corda vibrante, sua espessura, comprimento, pesos específicos, com a frequência de vibração. Posteriormente tem-se uma relação entre timbres e ondas sonoras que estará presente na Série Harmônica que, por sua vez, está ligada com as Séries de Fourier.

Diante do comentário de PRADO, 2010, podemos ver que a Série de Fourier possui íntima relação com um tópico que abordaremos mais a frente: Tópico (3.4) Série Harmônica.

Ainda em mesma sintonia, PEREIRA (2010, p. 34) cita:

Do ponto de vista matemático pode-se afirmar que a Série de Fourier é uma maneira de obter as componentes de uma onda complexa separando seus harmônicos. Sendo assim, há uma estreita relação entre a Série Harmônica e a Série de Fourier. Tal relação mostra-se um conceito essencial para a compreensão do timbre, já que essencialmente o que diferencia o timbre de diversos instrumentos musicais é a amplitude de seus harmônicos.

No intuito de dar um fundamental teórico melhor, vamos expor a tal Série de Fourier.

Para iniciarmos vamos fazer a seguinte definição (1):

Seja $T > 0$, definimos polinômio trigonométrico de grau N uma função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (1)$$

Definição (2): Seja $T > 0$, definimos série trigonométrica toda função do tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (2)$$

Em que $\omega = \frac{2\pi n}{T}$.

Ressaltamos aqui que se $f(t)$ é uma função periódica sendo: $f(t + T) = f(t)$. Então f possuirá uma representação da série trigonométrica conforme a Definição (2).

Vamos propor aqui demonstrar que T é um período para séries e polinômios trigonométricos conforme definimos acima. Para tal vamos denominar aqui Teorema (1) (Relações de ortogonalidade). As funções trigonométricas admitem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{T}{2}, n = m \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{T}{2}, n = m \neq 0 \\ T, n = m = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = 0 \quad (5)$$

Para n e m inteiros positivos.

Vamos demonstrar a Eq. (3), usaremos a seguinte identidade trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2} \quad (6)$$

Com $a = \left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ e $b = \left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$, aplicando (3) em (6) teremos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi(n - m)t}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n + m)t}{T}\right)}{2} \quad (7)$$

Se $n = m \neq 0$, vamos ter que:

$$\int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 - \cos\left(\frac{4\pi nt}{T}\right)\right] dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

Se $n \neq m$, vamos ter que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos\left(\frac{2\pi(n-m)t}{T}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+m)t}{T}\right) \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Agora para termos a Eq.(4), usaremos outra identidade trigonométrica:

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2} \quad (10)$$

Com $a = \left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ e $b = \left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$, então:

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi(n-m)t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(n+m)t}{T}\right)}{2} \quad (11)$$

Se $n = m \neq 0$, teremos:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi nt}{T}\right) \right] dt = \frac{T}{2} \quad (12)$$

Se $n \neq m$, teremos: Caso $n = m = 0$, então $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) = 1$, então:

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) dt = \int_0^T 1 dt = T \quad (13)$$

Enfim, para obtermos a Eq.(5), usaremos mais uma identidade trigonométrica:

$$\cos(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)}{2} \quad (14)$$

Com $a = \left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ e $b = \left(\frac{2\pi mt}{T}\right)$, então:

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n+m)t}{T}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(n-m)t}{T}\right)}{2} \quad (15)$$

Agora basta integrarmos a Eq(15) obteremos o resultado de igual modo nos dois casos anteriores.

Agora denominaremos Teorema (2) Seja $f(t)$ uma função definida por uma série trigonométrica da forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t)] \quad (16)$$

Então sob determinadas hipóteses de convergência, os coeficientes a_n e b_n são dados pelas seguintes expressões:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (17)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(\omega_n t) dt \quad (18)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(\omega_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(\omega_n t) dt \quad (19)$$

Em que $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$

Agora vamos demonstrar. Iremos multiplicar a Eq. (16) por $\cos(\omega_m t)$ e assim vamos obter:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_m t) f(t) &= \frac{a_0}{2} \cos(\omega_m t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) \cos(\omega_m t) + b_n \operatorname{sen}(\omega_n t) \cos(\omega_m t)] \end{aligned} \quad (20)$$

Agora integraremos em $[0, T]$ e vamos ter:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \cos(\omega_m t) f(t) dt \\
&= \int_0^T \frac{a_0}{2} \cos(\omega_m t) dt \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_0^T \cos(\omega_n t) \cos(\omega_m t) dt \\
&+ b_n \int_0^T \cos(\omega_n t) \cos(\omega_m t) dt]
\end{aligned} \tag{21}$$

Pelo teorema (1), se $m \neq n$, as parcelas do lado direito serão nulas. Sendo que a única parcela diferente de zero será aquela em $m = n$. Então vamos supor que $m = n \neq 0$, vamos ter:

$$\int_0^T \cos(\omega_m t) f(t) dt = a_m \frac{T}{2} \tag{22}$$

Em que obtivemos a Eq. (18). Agora supomos que $m = n = 0$, vamos obter a Eq. (16). E analogamente poderíamos calcular b_n . O qual nos daria a seguinte equação:

Vamos fazer a seguinte observação. $\cos(0) = 1$, a expressão de a_n com $n = 0$ se reduzira na expressão a_0 .

Faremos agora mais uma Definição (3). Seja $f(t)$ uma função T -periódica integrável em $[0, T]$. Define-se com a série de Fourier associada à função f , a série trigonométrica cujos coeficientes são dados pelas Eq. (17), (18) e (19).

Teorema (3). Seja f uma função periódica de período T , suave por partes e descontínua no máximo em um número finito de saltos dentro de cada intervalo, então a série de Fourier converge em cada ponto t para:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} \tag{23}$$

Em que $f(t-)$ e $f(t+)$ são os limites laterais à esquerda e à direita, respectivamente. Podemos observar que nos ponto t em quem $f(t)$ é contínua, então $f(t+) = f(t-)$ e a série de Fourier converge para $f(t)$.

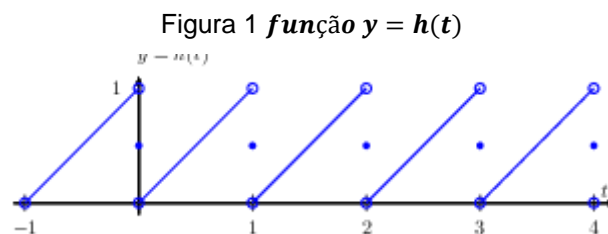
Vamos exemplificar. Seja $h(t)$ uma função dada por

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 1$$

$$f(t) = \frac{1}{2}, \quad t = 1$$

$$f(t+1) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Tal função é suave por partes e contínua exceto por salto nos inteiros onde $h(t)$ assume o valor médio dos limites laterais. Portanto se aplica o Teorema (3). Vamos utilizar as Eq. (17), (18) e (19) envolvendo integrais no intervalo $[0,1]$, isto é



Fonte: (SAUTER, 2020, p. 23)

$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = 1 \quad (24)$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi n t) dt = 2 \left[\frac{t \sin(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1$$

$$- 2 \int_0^1 \frac{\sin(2\pi n t)}{2\pi n} dt = 2 \left[\frac{t \sin 2\pi n t}{2\pi n} + \frac{\cos(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 \quad (25)$$

$$= 0$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi n t) dt$$

$$= 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi n t)}{2\pi n} \right]_0^1$$

$$+ 2 \int_0^1 \frac{\cos(2\pi n t)}{2\pi n} dt = 2 \left[-\frac{t \cos(2\pi n t)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi n t)}{4\pi^2 n^2} \right]_0^1 \quad (26)$$

$$= -\frac{1}{\pi n}$$

Então,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\text{sen}(2\pi t) + \frac{1}{2} \text{sen}(4\pi t) + \frac{1}{3} \text{sen}(6\pi t) + \dots \right) \quad (27)$$

Fazemos uma pequena observação: Os coeficientes b_n da série de Fourier de uma função par são nulos bem como os coeficientes a_n da série de Fourier de uma função ímpar também são.

3.2 Ondas

O estudo de fenômenos ondulatórios é um dos conceitos mais importantes da física.

Em sua obra, Fundamentos da Física, Halliday descreve a importância deste conceito para esta ciência:

Para se ter uma ideia da importância das ondas no mundo, basta considerarmos a indústria musical. Toda música que escutamos, de um samba de rua a um sofisticado concerto sinfônico, envolve a produção de ondas pelos artistas e a detecção dessas ondas pela plateia. Da produção a detecção, a informação contida nas ondas pode ser transmitidas por diversos meios (como no caso de uma apresentação ao vivo pela internet) ou gravada ou reproduzida (através de CDs, DVDs, etc). A importância do controle de ondas musicais é enorme e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas pode ser muito generosa. (HALLIDAY, 2012, p. 117).

Figura 2 propagação de ondas



Fonte: (VALLI, Emilio, 2015, p. 1).

De acordo com MÁXIMO & ALVARENGA (2013). A energia pode ser transportada por diversas formas, uma destas formas é através das ondas que se propagam tanto em meios materiais, chamadas de ondas mecânicas, como as que se propagam no vácuo, chamadas de ondas eletromagnéticas. Este transporte de energia através de ondas é muito comum e bastante utilizado no dia a dia e possui algumas classificações, como veremos a seguir.

Portanto, podemos definir uma onda como uma perturbação ou variação que transfere energia progressivamente de ponto a ponto em um meio e que pode tomar a forma de uma deformação elástica ou de uma variação de pressão, intensidade elétrica ou magnética, potencial elétrico ou temperatura. Qualquer objeto que pode gerar ruído ou perturbação é denominado fonte de uma onda.

Neste trabalho abordaremos as ondas que são propagadas em meios sólidos, como a corda de violão.

Natureza das ondas

De acordo com Ramalho (2007). Quanto à natureza da onda, existem duas: mecânica e eletromagnética.

Ondas mecânicas: Estas são variedades que precisam de um meio material para propagação e não se propagam no vácuo. Essas são as mais conhecidas. Exemplos: Ondas sonoras, ondas em cordas, em cuba de ondas, etc.

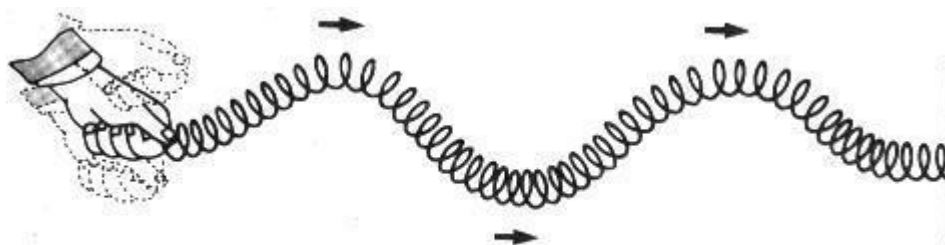
Ondas eletromagnéticas: Não necessitam de um meio de propagação. Elas são causadas por cargas elétricas oscilantes. Exemplos: Antena de transmissão de rádio ou de televisão; micro-ondas, raios-X e luz.

Tipos de ondas

Ainda conforme Ramalho (2007). Existem dois tipos de ondas, a saber:

Ondas Transversais: Transmite na direção perpendicular, na direção da oscilação.

Figura 3 pulso realizado por uma mola

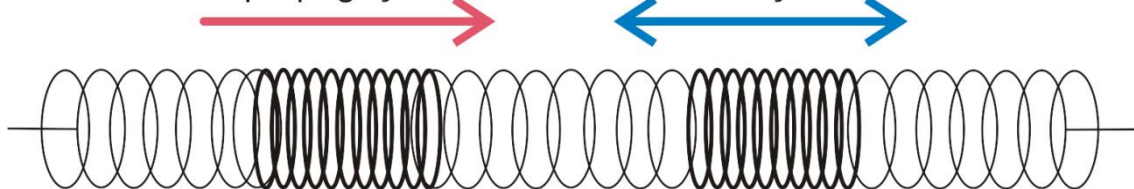


Pulso transversal realizado por uma mola.

Fonte: (VENTURA, Daniel Rodrigues, 2011, p.1).

Ondas longitudinais: Elas se propagam na mesma direção da vibração. O som viaja em gases e líquidos por ondas longitudinais.

Figura 4 Direção de propagação da onda
 direção de propagação direção de vibração



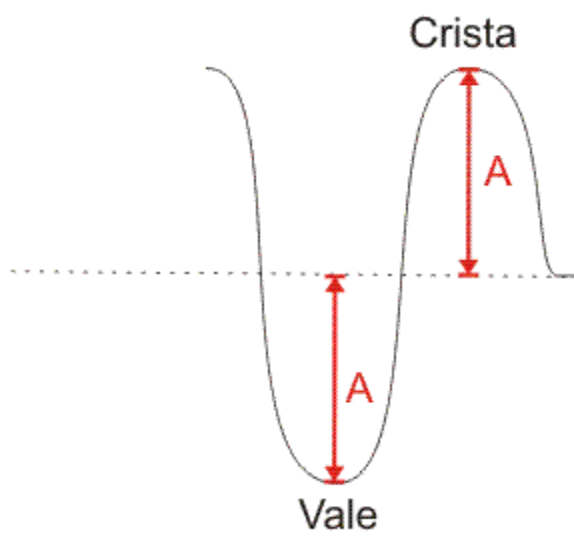
Fonte: (BORGES, NICOLAU, 2013, p. 1).

Conforme mostrado na Figura 4, a onda viaja no sentido horizontal. E, qualquer ponto da mola, também, se propaga da esquerda para a direita na horizontal. Quando as ondas estão na mesma direção, falamos de ondas longitudinais.

Características das ondas

Amplitude: De acordo com Halliday (2012). A amplitude é dada pelo ponto mais alto da onda chamado crista. Assim também como no ponto mais baixo da onda, chamado vale.

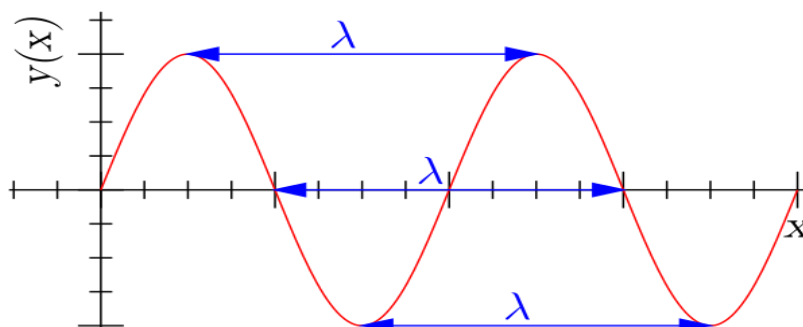
Figura 5 Vale e crista da onda



Fonte: (SÓ FÍSICA, 2008).

Comprimento de onda (λ): Ainda conforme Halliday (2012). O comprimento de onda é a distancia (paralela à direção de propagação da onda) entre repetições da forma de onda. Representado pela letra grega λ (Lâmbda), mede a distância entre duas cristas consecutivas ou dois vales, também, consecutivos ou de um nó a outro.

Figura 6 Comprimento de onda



Fonte: (TANAKA, Hugo Shigueo. 2021).

Período (T): Halliday (2012). Define período como o tempo que um elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa.

Velocidade (v): Toda a onda possui sua velocidade de propagação, geralmente, depende do meio, para calcularmos temos que dividir o comprimento da onda pelo período.

$$v = \frac{\lambda}{f} \quad (28)$$

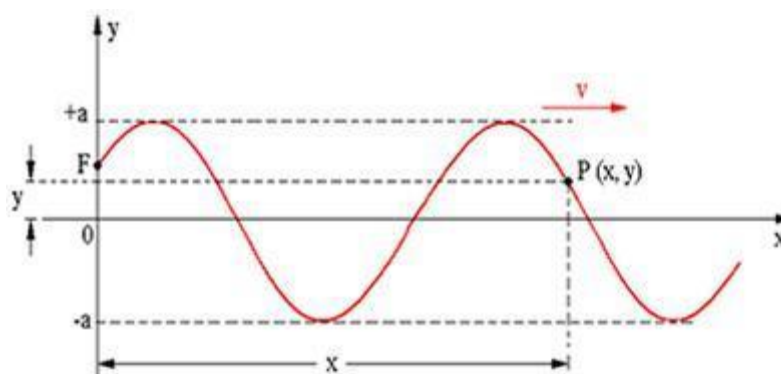
Frequência (f): É o quantidade de oscilações de uma onda, em certo intervalo temporal, e sua unidade de medida é hertz (Hz.). (HALLIDAY, 2012) também define como sendo o inverso do período.

Função de onda

Ramalho (2007) nos diz que uma função dependente de duas variáveis de x e t é denominada função de onda.

Então podemos dizer que função de onda é dependente de dois termos da posição e do tempo $y(x,t)$.

Figura 7 Função de onda



Fonte: (SILVA, Domiciano Correa marques. 2021).

A Figura 7 tem a representação de uma função de uma representada por onda periódica representada por “y” de velocidade v que se propaga ao longo do eixo x. Esta função é obtida pela equação de D’Alembert:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad (29)$$

E que sua solução geral se da por:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (30)$$

È bem verdade que a equação de onda às vezes é escrita de outras maneiras, mas com a intenção de podermos demonstrar que a Eq. (30) satisfaz a Eq. (29), tentaremos uma solução geral.

Para uma equação de onda em uma dimensão não é comum que sua equação diferencial parcial envolverá uma solução geral que fique simples para se encontrar. Sendo assim, vamos definir novas variáveis.

$$\xi = x - ct \ ; \ \eta = x + ct \quad (31)$$

Então vamos escrever a função de onda de modo geral unidimensionalmente, ficando da seguinte maneira:

$$\psi = \psi(x, t) \quad (32)$$

Agora iremos derivá-la parcialmente em relação a x , assim teremos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (33)$$

E a derivada segunda da função de onda ficará:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (34)$$

Vale resaltar que os termos $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1$

Agora manipulando as Eq. (33) e (34), vamos obter:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (35)$$

Sabendo que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi}$

Então

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (36)$$

Agora iremos derivar parcialmente a equação de onda em relação à t , então vamos ter:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (37)$$

Ressaltaremos que $\frac{\partial \xi}{\partial t} = v$ e que $\frac{\partial \eta}{\partial t} = -v$

Assim vamos ter:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{v \partial \psi}{\partial \xi} - \frac{v \partial \psi}{\partial \eta} \quad (38)$$

E que a derivada segunda em relação à t , ficará:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{v \partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{v \partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (39)$$

Então agora manipulando as Eq. (38) e (39) teremos:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{v^2 \partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{2v^2 \partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{v^2 \partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (40)$$

Substituindo na equação da onda teremos:

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (41)$$

Então

$$v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (42)$$

Logo

$$\frac{4v^2 \partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (43)$$

Então

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (45)$$

Portanto temos como solução:

$$\psi = f(\eta) + g(\xi) \quad (46)$$

Que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\psi = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (47)$$

Sendo assim demonstramos que a Eq. (30) satisfaz a Eq. (29) como uma solução.

Seguindo a diante, trataremos de um caso particular que é chamado de ondas harmônicas, que é correspondente a uma oscilação harmônica simples e sua forma de onda é uma função senoidal:

$$f(x') = A \sin(kx') \quad (48)$$

Onde x é dado por :

$$x' = x - vt \quad (49)$$

Assim teremos:

$$y(x, t) = A \text{sen}(k[x - vt]) \quad (50)$$

Vemos assim que temos kv que podemos chamar de frequência angular “ ω ”. Assim num dado ponto x é :

$$\omega = kv = 2\pi v = \frac{2\pi}{t} \quad (51)$$

Substituindo Eq. (51) em (50) temos:

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t) \quad (52)$$

Onde A é a amplitude da onda, k é o número de ondas, x é a posição, ω frequência angular e t é o intervalo de tempo.

HALLIDAY, 2010 em seu livro nos diz:

“Quando uma onda passa por um elemento de uma corda esticada, o elemento se move perpendicularmente à direção de propagação da onda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento do elemento, podemos obter uma equação diferencial geral, chamada de equação de onda, que governa a propagação de ondas de qualquer tipo. página. 127”.

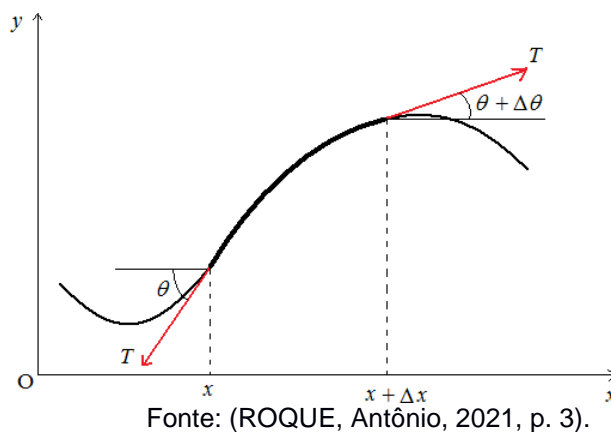
Vamos aproveitar este comentário de Halliday e particularizar o caso citado. Deduziremos a equação de onda em uma corda tensionada.

Imagine uma corda esticada, digamos de um violão. Agora iremos supor que a corda seja de comprimento L . A densidade linear dessa corda seja uniforme, e que a corda esteja esticada com uma força de tensão constante T .

Agora iremos supor que a corda executa vibrações verticais e horizontais, de modo que ela possa ser representada em algum momento no plano $(x - y)$ por uma função $y(x, t)$.

Em algum momento, um pequeno pedaço qualquer da corda vai estar na posição genérica indicada na Fig. 8.

Figura 8 Pequeno elemento de corda tensionado



Podemos escrever este pequeno segmento de massa da corda de seguinte modo:

$$\Delta m = \mu \Delta x \quad (53)$$

Onde Δx será seu pequeno comprimento e μ será sua densidade linear.

As componentes verticais e horizontais das forças resultantes será:

$$F_x = T \cos(\theta + \Delta\theta) - T \cos\theta \quad (54)$$

e

$$F_y = T \sin(\theta + \Delta\theta) - T \sin\theta \quad (55)$$

Estamos supondo que a corda se mova apenas na direção y . Isto faz com que a força na direção x seja nula, conseqüentemente teremos:

$$\cos(\theta + \Delta\theta) = \cos\theta \quad (56)$$

A força resultante em y , conforme a 2ª lei de Newton será.

$$F_y = (\mu\Delta x)a_y = (\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (57)$$

A aceleração a_y está expressa em termos de uma derivada parcial por que y é uma função de duas variáveis, x e t .

Substituindo a Eq. (55) em (53) temos:

$$T\text{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\text{sen}\theta = (\mu\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (58)$$

Ou

$$\text{sen}(\theta + \Delta\theta) - \text{sen}\theta = \Delta x \frac{\mu \partial^2 y}{T \partial t^2} \quad (59)$$

Dividindo os dois lados da Eq. (59) pelo mesmo termo: $\cos\theta$. Com base na Eq. (49) vamos obter

$$\frac{\text{sen}(\theta + \Delta\theta)}{\cos(\theta + \Delta\theta)} - \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\Delta x}{\cos\theta} \frac{\mu \partial^2 y}{T \partial t^2} \quad (60)$$

Sabendo que o coeficiente angular da reta tangente a uma função em um dado ponto do seu domínio é igual à derivada da função neste ponto. Poderemos escrever da seguinte maneira:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\Delta x}{\cos\theta} \frac{\mu \partial^2 y}{T \partial t^2} \quad (61)$$

Dividindo os dois lados da Eq. (61) por Δx obteremos, do primeiro lado da equação, a seguinte expressão:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)}{\Delta x} \quad (62)$$

No limite em que $\Delta x \rightarrow 0$, esta expressão será a derivada parcial em relação a x de $\partial y / \partial x$, que é a derivada parcial segunda $\partial^2 y / \partial x^2$. Logo a Eq. (61) pode ser escrita assim:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad (63)$$

Neste estágio, vamos supor que o deslocamento da corda é pequeno. Tendo como consequência que os ângulos associados aos deslocamentos também serão pequenos e $\theta \ll 1$.

Então $\cos\theta \approx 1$ e a Eq. (63) torna-se:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad (64)$$

Está é a equação de D'Alembert, conforme mostramos na Eq. (29)

Agora notemos que o termo μ/T tem dimensão de v^{-2} de modo que podemos escrever da seguinte maneira.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \quad (65)$$

O qual v é a velocidade da onda na corda tensionada. Sendo assim:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (66)$$

A Eq. (66) está nos mostrando que a velocidade de uma corda depende da resistência à tração da densidade linear. Ou seja, conforme aumentar a densidade linear da corda, aumentará a velocidade da onda e vice-versa.

Princípio da superposição

Conforme definição de Halliday (2012). Muitas vezes acontece de um numero igual ou maior que duas ondas, quando viajam simultaneamente na mesma área. Por exemplo, quando ouvimos um show ao vivo as ondas sonoras chegam aos nossos ouvidos simultaneamente. Vamos supor duas ondas se propagando

simultaneamente em uma mesma corda tensionada. Sejam $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ deslocamento que a corda experimentaria se cada onda viajasse. A mudança de posição da corda na presença de uma onda simultânea será a soma algébrica

$$y_t(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (67)$$

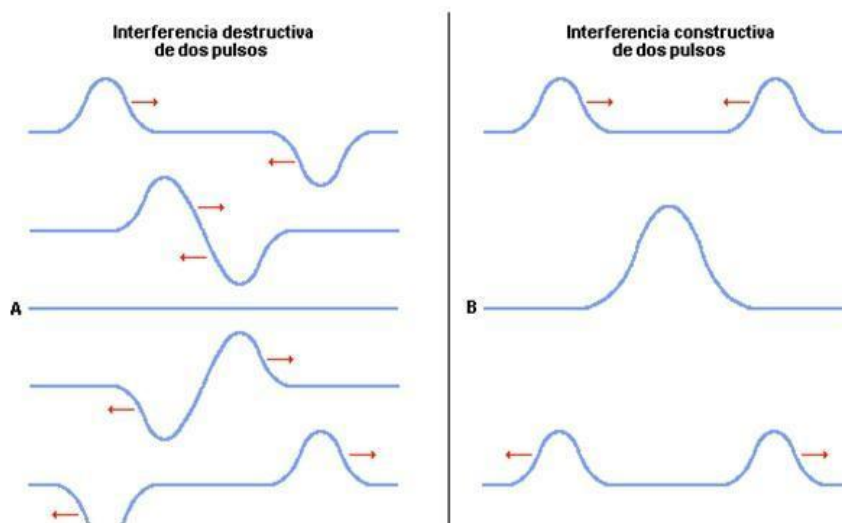
O somatório total desse deslocamento nos diz que as ondas sobrepostas se somarão algebricamente, produzindo uma nova onda resultante.

Interferência de ondas

Podemos definir interferência, conforme Ramalho (2007) é o fenômeno resultante da superposição de duas ou mais ondas.

A forma da onda resultante depende da fase relativa das duas ondas. Se as ondas estão exatamente em fase (ou seja, se os picos e os vales de uma estão exatamente alinhados com os da outra), o deslocamento total a cada instante é o dobro do deslocamento que seria produzido por apenas uma das ondas. Se estiverem totalmente defasadas (ou seja, se os picos de uma estão exatamente alinhados com os vales da outra), elas se cancelam mutuamente e o deslocamento é zero: a corda permanece parada. O fenômeno de combinação de ondas recebe o nome de interferência e dizemos que as ondas interferem entre si. (O termo se refere apenas aos deslocamentos; a propagação das ondas não é afetada). HALLIDAY (2012).

Figura 9 Interferência de onda



Fonte: (SILVA, Domiciano Correa Marques, 2021).

A Fig. 9 mostra o que venha a ser esse fenômeno.

Vamos supor que uma das ondas que estão se propagando em uma corda será dada da seguinte maneira:

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (68)$$

E que outra, deslocada em relação à primeira é dada por:

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \theta) \quad (69)$$

As ondas terão frequências angulares ω iguais (consequentemente, a mesma frequência f), e terão o número de onda k (logo também terão o mesmo comprimento de onda λ) e a mesma amplitude. Todas elas se propagarão no sentido positivo do eixo horizontal, tendo suas velocidades iguais. Ambas diferirão somente de um ângulo constante θ , a constante de fase. Dizemos que essas ondas estão defasadas de θ .

Apoderando-se do princípio de superposição, a onda resultante será a soma algébrica das duas ondas e terá uma mudança de posição.

$$y_t(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (70)$$

$$y_t(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx - \omega t + \theta) \quad (71)$$

Sabendo que a soma do seno de dois ângulos α e β obedece à identidade:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (72)$$

Aplicando esta relação de (72) em (71) teremos:

$$y_t(x, t) = \left[2A \cos \frac{1}{2}\theta \right] \sin(kx - \omega t + \frac{1}{2}\theta) \quad (73)$$

A onda resultante irá ser diferente das ondas individualizadas em dois aspectos: primeiro a constante de fase é $\theta/2$, e segundo a amplitude de y_t é o módulo do fator entre colchetes da equação.

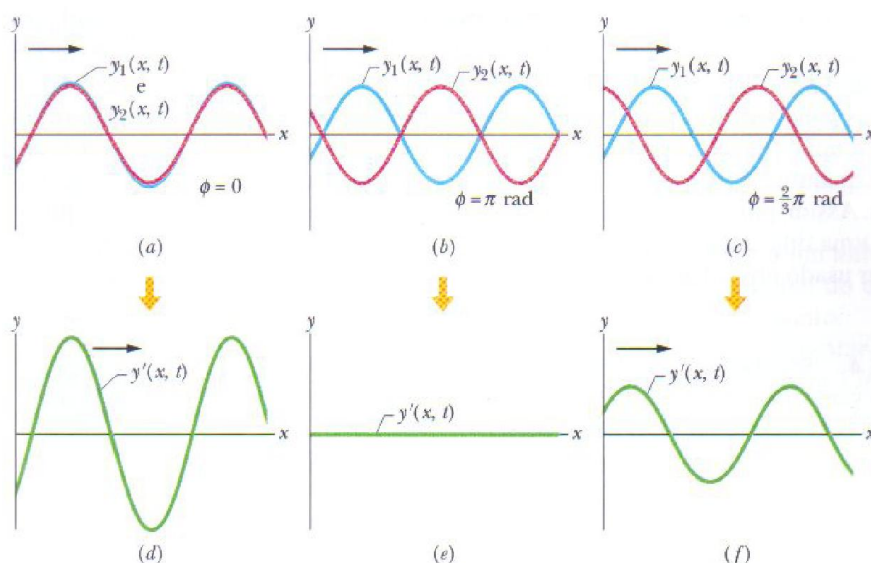
$$A_t = \left[2A \cos \frac{1}{2}\theta \right] \quad (74)$$

Se $\theta = 0$ rad (ou 0°). Ambas as ondas estarão exatamente em fase, quando equação se reduzir a:

$$y_t(x, t) = 2A \sin(kx - \omega t) \quad (\theta = 0) \quad (75)$$

Esta onda resultante está plotada na figura 10 (d). Vamos observar a figura e a equação. A amplitude da onda resultante é duas vezes maior que a amplitude.

Figura 10 Superposição da onda



Fonte: (HALLIDAY, 2012, p. 131).

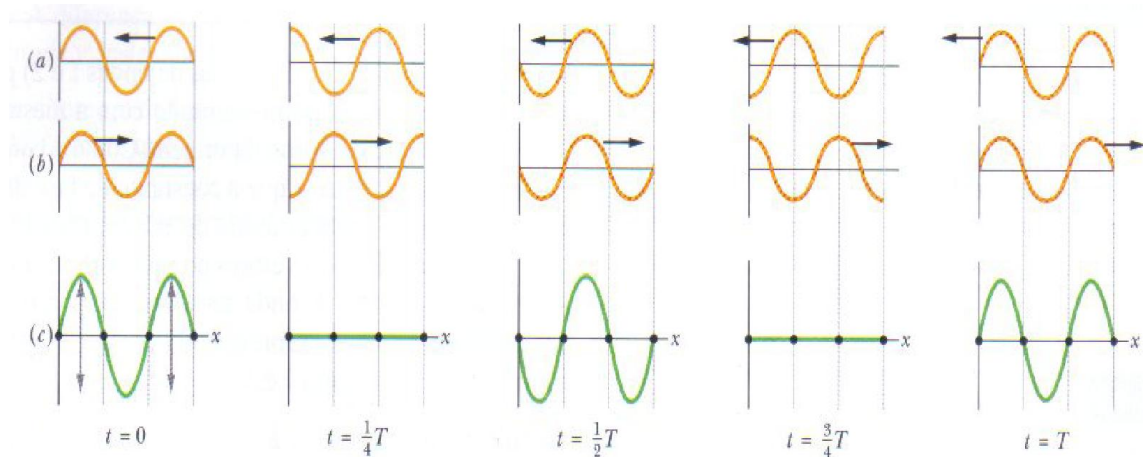
Ondas estacionárias

A interferência de duas ondas senoidais iguais que se propagam em sentidos opostos produz uma onda estacionária (HALLIDAY, 2012).

Já foi abordado o caso em que duas ondas senoidais do mesmo comprimento de onda e amplitude se propagam na mesma direção em uma corda. E se elas se espalharem em direções opostas? De igual modo, obteremos a onda resultante usando o princípio da superposição.

A situação está ilustrada na figura 11. A figura 11 mostra uma onda se propagando para a esquerda em (a) e a outra onda se propagando para a direita em (b). A figura 11 (c) mostra a soma das duas ondas, obtida aplicando graficamente o princípio de superposição. O que é notável na onda resultante é o fato de que existem posições na corda, denominados de nós, que permanecem estacionários. Quatro nós estão demonstrados na figura 11 (c). Entre os nós vizinhos estão os ventres, ponto onde a amplitude da onda gerada será máxima.

Figura 11 Ondas estacionárias



Fonte: (HALLIDAY, 2012, p. 133).

As ondas mostradas na Fig. 11 (c) são denominadas de ondas estacionárias porque a forma de onda não se move para a direita ou esquerda; os pontos de máximos e mínimos não mudam com a variação temporal.

Analisaremos a onda estacionária, representando as duas ondas usando a seguinte função.

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (76)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t) \quad (77)$$

Conforme o princípio de superposição, a onda resultante será:

$$y_t(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \quad (78)$$

Aplicando a relação trigonométrica de identidade, teremos:

$$y_t(x, t) = [2A \sin kx] \cos \omega t \quad (79)$$

O fator dentro dos colchetes é a amplitude da oscilação do elemento da corda que se encontra na posição x . No entanto, conforme amplitude é sempre positiva e $\sin kx$ poderá ser negativo, temos o valor de $2A \sin kx$ como a amplitude em x .

Quando temos onda senoidal progressiva sua amplitude será a mesma para todos os elementos da corda. Essa ocorrência não acontece em uma onda estacionária cuja amplitude muda com a posição. Por exemplo, em uma onda estacionária da equação mostrada anteriormente, a amplitude será zero para os valores possíveis de kx tal modo que $\text{sen}kx = 0$. Esses valores são:

$$kx = 0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (80)$$

Fazendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ nesta equação e reagrupamos os termos, teremos:

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \text{ (nós)} \quad (81)$$

nas posições sem amplitudes (nós) da onda estacionária. Notemos que os nós próximos estão separados de $\lambda/2$, metade do comprimento de onda.

A amplitude de uma onda estacionária assumirá seu maior valor possível de $2A$ que irá ocorrer com os valores de kx tais que $|\text{sen } kx| = 1$. Esses valores são

$$kx = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi \quad (82)$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (83)$$

Fazendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ da equação e reagrupar os termos, teremos:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (84)$$

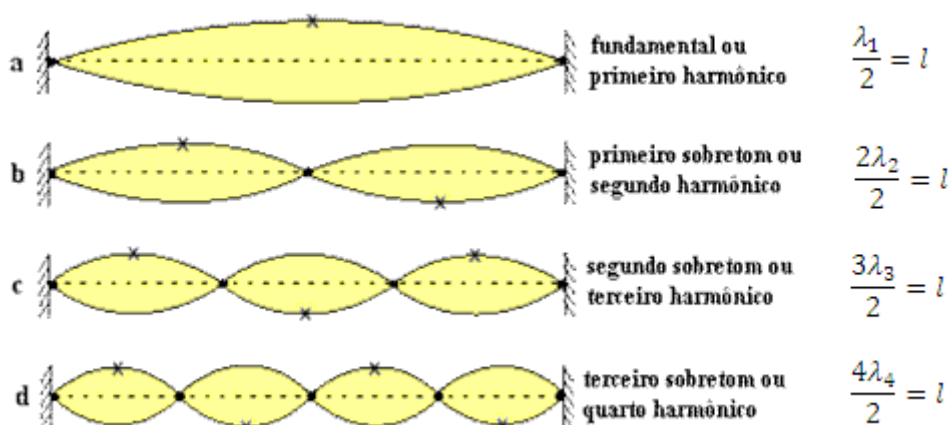
Nas posições de máxima amplitude (ventres) da onda estacionária os ventres estão separados de metade do comprimento de onda e estão exatamente no meio dos nós próximos.

Ressonância

Ondas estacionárias podem ser produzidas em uma corda pela reflexão de ondas progressivas nas extremidades de uma corda. Se uma extremidade é fixa, existe um nó nessa posição. Isso limita as frequências possíveis das ondas estacionárias em uma corda. Cada frequência possível é uma frequência de ressonância (HALLIDAY, 2012).

O fenômeno será mais bem demonstrado na Figura 12

Figura 12 Harmônicos da onda



Fonte: (NETTO, Luiz Ferraz, 1999).

Uma segunda configuração simples que satisfaz o requisito de que existem nós nas extremidades fixas aparece na figura 12 (b). Essa configuração tem três nós e dois ventres. Para que as ondas sejam propagadas à direita e à esquerda seja excitada precisa-se ter um $\lambda = L$. Uma terceira configuração é a que aparece na Figura 11 (c), com quatro nós e três ventres, e o comprimento de onda é $\lambda = 2L/3$. Poderíamos continuar essa progressão desenhando configurações cada vez mais complicadas. Em cada etapa do processo, a amostra terá um nó e uma barriga (ventre) extra em comparação à etapa anterior, e a metade do comprimento de onda adicional será colocada a uma distância L .

Portanto, uma onda estacionária poderá ser excitada em uma corda que tenha comprimento L por outra onda aleatória desde que possua um comprimento de onda satisfazendo a seguinte condição.

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (85)$$

Podemos calcular as frequências ressoantes correspondentes a tais comprimentos de ondas citados, assim:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots \quad (86)$$

Onde v é a velocidade das ondas progressivas na corda.

Esta equação nos diz que as frequências ressonantes serão múltiplos inteiros das frequências ressonantes mais baixas, $f = v/2L$, correspondendo a $n = 1$. O modo de oscilação com a frequência mais baixa é denominado modo de oscilação harmônica fundamental ou de primeira ordem. O segundo harmônico será o modo oscilante para $n = 2$, o terceiro harmônico será o modo para $n = 3$, e assim sucessivamente. A frequência associada a esses modos é muitas vezes referida como f_1, f_2, f_3 , e assim sucessivamente. O conjunto de todos os modos possíveis de oscilação é denominado série harmônica e n é denominado enésimo harmônico.

Para uma corda submetida certa tensão cada frequência de ressonância corresponde a certo padrão de oscilação. Assim, se a frequência está na faixa de sons audíveis é possível "ouvir" a forma da corda. A ressonância também pode ocorrer em duas dimensões e em três dimensões.

Para dar uma maior fundamentação teórica neste tópico, iremos propor resolução da equação de onda de uma corda com suas extremidades fixas, a fim de justificar os modos normais (ondas estacionárias).

A equação de onda poderá ser escrita como:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (87)$$

Vamos supor que a corda é de comprimento L , em seu repouso está no intervalo $[0, L]$, ou seja, têm as extremidades em $x = 0$ e $x = L$. Seja $u(x, t)$ o deslocamento da corda na posição x e no tempo t , satisfazendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{tal, que } 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (88)$$

Levando em conta que as extremidades da corda estão presas, para o tempo t ,

$$u(0, t) = 0 \quad e \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (89)$$

As condições iniciais irão determinar a forma inicial da corda, bem como sua velocidade inicial,

$$u(x, 0) = f(x) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L \quad (90)$$

Assim teremos para $t > 0$,

$$X(0)T(t) = 0; \quad X(L)T(t) = 0 \quad (91)$$

Se $X(0) \neq 0$ e $X(L) \neq 0$, teremos: $T(t) = 0$ para todos os t , de onde $u(x, t) = 0$. Com a finalidade de não termos uma solução trivial, vamos considerar $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$. Assim vamos ter o seguinte problema para X ,

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \mu X = 0, \quad X(0) \quad e \quad X(L) = 0 \quad (92)$$

Veremos que alguns valores de μ nos levará a uma solução não trivial X . Vamos considerar: $\mu > 0$.

Seja $\mu = k^2$, com $k > 0$, a equação em X é

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0 \quad (93)$$

Com solução geral

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \text{sen}(\omega_n t)] \quad (94)$$

Somente uma maneira satisfará as condições de contorno em X , fazendo $c_1 = c_2 = 0$. A condição $X(0) = 0$ implica $c_1 \cosh(0) = c_2 \sinh(0) = c_1 = 0$, logo $X(x) = c_2 \sinh(kx)$. A condição $X(L) = 0$ implica que $c_2 \sinh(kL) = 0$. Como $kL \neq 0$ e $c_2 = 0$, e que $X = 0$, ou seja, para $\mu > 0$ obteremos soluções triviais.

Se $\mu = 0$: a equação ficará reduzida a $\frac{d^2X}{dx^2} = 0$ com solução $X(x) = c_1x + c_2$. Somente uma maneira satisfará as condições de fronteira em X , fazendo $c_1 = c_2 = 0$, Levando-nos mais uma vez solução trivial para $u = 0$.

Se $\mu < 0$: seja $\mu = -k^2$, então

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) \quad (95)$$

A Solução geral para essa equação será:

$$X(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) \quad (96)$$

A condição $X(0) = 0$ implicará: $c_1 = 0$ e conseqüentemente, $X = c_2 \sin(kx)$. A condição $X(L) = 0$ implica que $c_2 \sin(kL) = 0$. Com a intenção de evitar a solução trivial $X = 0$, faremos $c_2 \neq 0$, então $\sin(kL) = 0$. Sabendo que a função seno se anula em múltiplos de π , concluímos que:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (97)$$

Onde $c_2 = 1$.

Vale frisar o seguinte: os valores negativos de n obteremos as mesmas soluções, excetuando-se o sinal, então poderemos eliminar os valores $n < 0$.

Agora substitua $\mu = -k^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ na equação obtida separação de variáveis

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \mu c^2 T = 0 \quad (98)$$

Obteremos:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \left(c \frac{n\pi}{L}\right)^2 T = 0 \quad (99)$$

Esta equação diferencial terá como solução

$$T(t) = T_{n(t)} = a_n \cos(\lambda_n t) + b_n \text{sen}(\lambda_n t) \quad (100)$$

Com

$$\lambda_n = c \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (101)$$

Em que a_n e b_n são constantes.

As soluções apresentadas também são conhecidas como modos normais da equação de onda (ondas estacionárias). Como todos os modos normais podem satisfazer a equação linear homogênea com suas condições de contornos, pelo princípio da superposição, outra combinação linear qualquer também poderá ser uma solução da equação de onda.

3.3 Física e música

Experimento monocórdio

De acordo com FEYNMAN, 2008, o primeiro experimento que indica a relação que a música tem com a física é creditado a Pitágoras com o experimento do monocórdio.

Este experimento envolve tocar uma corda, variando seu comprimento cujos serão associados aos intervalos musicais.

Ao fazer este experimento, as proporções de comprimento da corda $1/2$, $2/3$ e $3/4$, correspondem exatamente à oitava, à quinta e à quarta do intervalos musicais.

O experimento nos fornece informações que somente as consonâncias perfeitas 8ª, 5ª e 4ª são provenientes de razões simples $1/2$, $2/3$ e $3/4$, fornece-nos

também que para a composição de intervalos musicais por razões matemáticas o fundamento da construção da escala pitagórica. O experimento que Pitágoras fez, faz a gente perceber que "elevar" ou "diminuir" um intervalo na música estará associado a "compor" ou "decompor" o comprimento da corda produzindo assim uma nota "mais baixa" ou "mais alta" pelo fator associado ao intervalo.

A elaboração da escala de Pitágoras terá como resultado a aquisição de quintas compostas que são então reduzidas a notas equivalentes em oitavas, ou seja, assumindo que a nota inicial é igual a 1, sua quinta será produzida por $2/3$, equivalente à nota "sol". A quinta do "sol", por sua vez, por $(2/3)(2/3) = (4/9)$, Quando diminuído à oitava inicial resultará em $8/9$, que equivale à nota "Ré" o intervalo $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$ da nota "Ré" irá reproduzir a nota "Lá", e assim sucessivamente, o que terá como resultado a seguinte escala diatônica:

$$\textit{segunda} = 1 \textit{ quinta} + 1 \textit{ quinta} - 1 \textit{ oitava} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{9}$$

$$\textit{terça} = 1 \textit{ sexta} + 1 \textit{ quinta} - 1 \textit{ oitava} = \frac{\frac{16}{27} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{64}{31}$$

$$\textit{quarta} = \frac{3}{4} \textit{ (Monocórdio)}$$

$$\textit{quinta} = \frac{2}{3} \textit{ (Monocórdio)}$$

$$\textit{sexta} = 1 \textit{ segunda} + 1 \textit{ quinta} = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$$

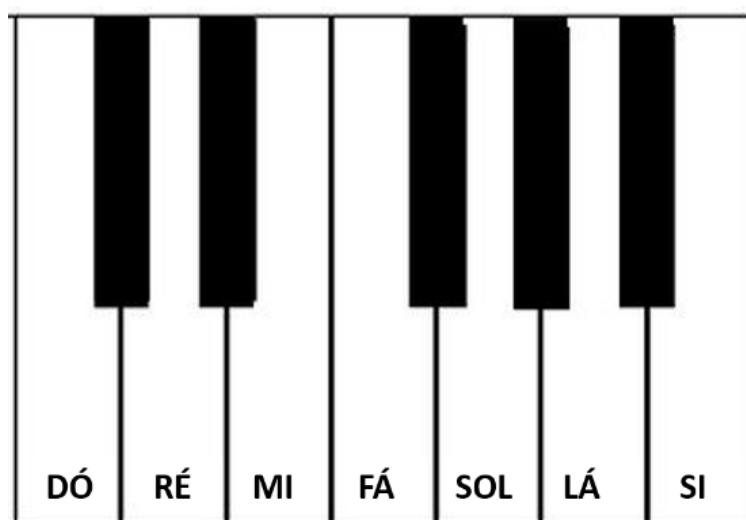
$$\textit{sétima} = 1 \textit{ sexta} + \textit{segunda} = \frac{16}{27} \cdot \frac{8}{9} = \frac{128}{243}$$

Tabela 1 proporção com as notas musicais

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Fonte: Próprio Autor, 2021.

Figura 13 Teclas brancas representando a escala diatônica no piano



Fonte: (DESCOMPLICANDO A MÚSICA, 2021).

3.4 Série Harmônica

Um som musical é mais do que apenas uma nota musical. Além do som principal, existem nuances, que são muito fracas e quase imperceptíveis. O som principal é chamado de fundamental e os sons que o acompanham são os harmônicos.

Uma corda, quando vibra como um todo, produz certa nota musical. No momento em que a corda está vibrando, ela também dividirá simultaneamente em duas metades tendo assim o intervalo de uma oitava justa superior. Além de vibrar toda a corda e formar as duas metades da corda também vibram simultaneamente, dividindo-se em terças, quartas, quintas, etc., criando oscilações secundárias, o conjunto de sons que acompanha um som fundamental é denominado série harmônica.

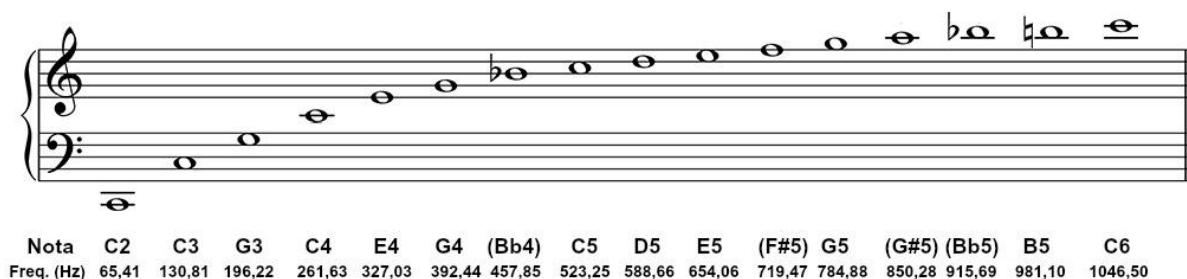
PEREIRA (2010, p. 33) cita o seguinte “Produzir um som em um instrumento musical significa colocar algum elemento em que esta vibração seja transmitida ao ar. A frequência ou altura do som produzido vai depender das características do meio vibratório (uma corda, coluna de ar, etc.); os sistemas físicos não vão vibrar uma única forma, mas sim emitindo diversas frequências, todas múltiplas da nota fundamental. Estas outras frequências são os harmônicos ou parciais, e sua composição (Série Harmônica) é o que vai caracterizar o timbre do instrumento.”.

De mesmo modo PRADO (2010, p. 58) citará a seguinte frase “Uma outra relação importante da série harmônica é que ela está ligada ao timbre sonoro, ou a cor do instrumento. É justamente a superposição dos harmônicos e suas intensidade que vão gerar a onda resultante que contribuirá para um certo timbre.”.

Podemos então estabelecer a relação da importância da série harmônica com uma das propriedades do som, o timbre, que por sua vez é produto de uma superposição de ondas.

A Série Harmônica é de principal interesse quando se trata de estabelecer uma conexão entre a música e a física. Possuindo grande vínculo com as Séries de Fourier.

Figura 14 Série Harmônica da nota dó



Fonte: (SANTO, Angelo, 2016).

Na Fig. 14 temos 16 notas de uma série harmônica adiante a fundamental é a nota dó, temos então uma sequencia de notas: dó – dó – sol – mi – sol – sib – dó – ré – mi - fá# -sol – láb – lá – sib – si - dó, esta sequência de notas obedecem a uma sequência de intervalos independente de seu som gerador, sendo essa série de intervalo: 8ª justa – 5ª justa – 4ª justa – 3ª maior – 3ª menor – 3ª menor –

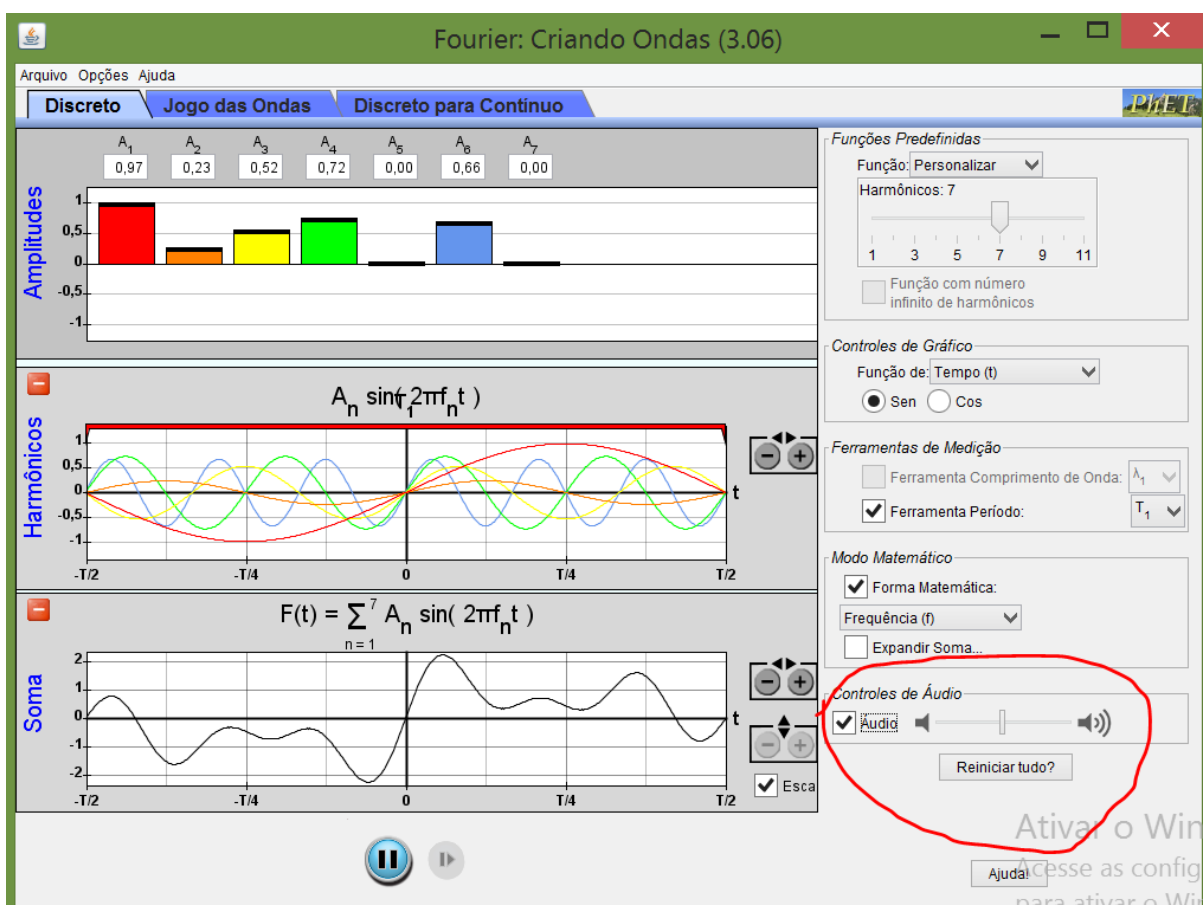
*2ª maior – 2ª maior – 2ª maior – 2ª maior – 2ª menor – 2ª menor –
2ª maior – 1ª aumentada e por fim 2ª menor.*

Interpretando fisicamente o que acontece quando produzimos uma vibração em uma corda dó: a corda vibra em vários modos diferentes. Cada componente Harmônico da vibração original contribui para a formação da onda resultante. O resultado da vibração de todos os harmônicos é uma superposição das ondas sonoras que são combinadas em uma única onda complexa na frequência de modo natural de primeira ordem e com uma sequência de harmônicos superiores de frequência $2f_1, 3f_1, 4f_1$ e etc. Esta onda complexa é representada por uma superposição de todas estas contribuições.

Tal qual foi demonstrado no tópico (3.1), existe um teorema impactante na Física e em especial na Física da Música: O Teorema de Fourier ou Série de Fourier. Por meio deste Teorema, podemos representar uma onda complexa qualquer através da soma de funções senos e cossenos. Essa proposta tem uma enorme utilidade para obtermos sons sintetizados por meios eletrônicos. Os osciladores eletrônicos podem produzir uma série de harmônicos de tal que podemos criar sons complexos.

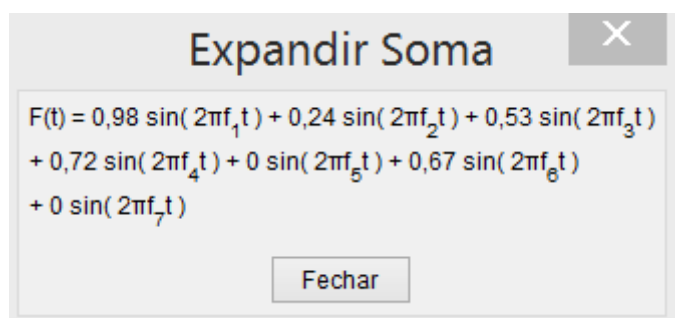
Temos na Fig. 15, um simulador disponível de forma livre e gratuito, do site <https://phet.colorado.edu/pt_BR/> desenvolvido por Chris Malley, que se pode observar um exemplo da Série de Fourier.

Figura 15 Corte da tela do simulador componente de Fourier com 7 harmônicos



Fonte: (MALLEY, Chris, 2021).

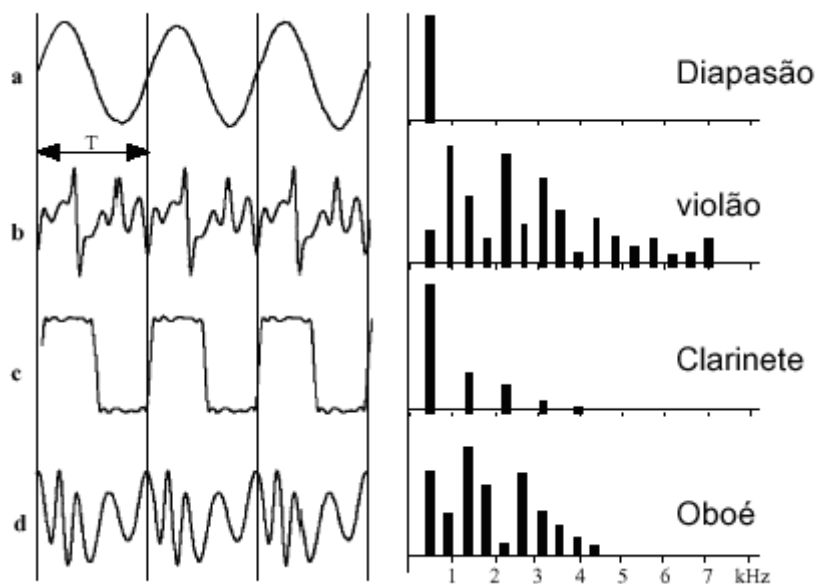
Figura 16 Expansão matemática da onda resultante



Fonte: (MALLEY, Chris, 2021.)

Como exemplo podemos considerar a clarineta que não possui a série harmônica completa, só produz os números ímpares, a trompa tem os seus primeiros harmônicos mais intensos enquanto os números mais afastados vão ficando menos intenso.

Figura 17 Timbre de cada instrumento



Fonte: (CONSERVATÓRIO, 2021).

Para que seja construída de maneira clara a relação entre os fenômenos físicos envolvidos quando um instrumento é tocado, é fundamental que se entenda como este instrumento amplifica o som (ressonância, amplificação elétrica.), como o instrumento vibra, ou seja, quais são os modos de vibração que geram harmônicos com maior amplitude (e, portanto qual será o seu timbre) e como este instrumento é afinado (PEREIRA, 2010).

4 EXPERIMENTO DE BAIXO CUSTO

4.1 Metodologia e Desenvolvimento

O experimento está fundamentado em um artigo de Cavalcante et al 2004, e 20013 que irá propor um estudo em ondas estacionárias em cordas, o qual podemos desenvolver um experimento de baixo custo que pudesse ser reproduzido com facilidade.

Software para gerar os sinais “SweepGen (para PC)” e “ToneGenerate (para celular)”.

- Caixa de som simples 3W de potência.
- Base de madeira.
- Barbante com um peso colado a caixa de som por meio de um pino
- Polia
- PC ou Celular.
- Cola

Figura 18 foto do protótipo desenvolvido



Fonte: Próprio Autor, 2021.

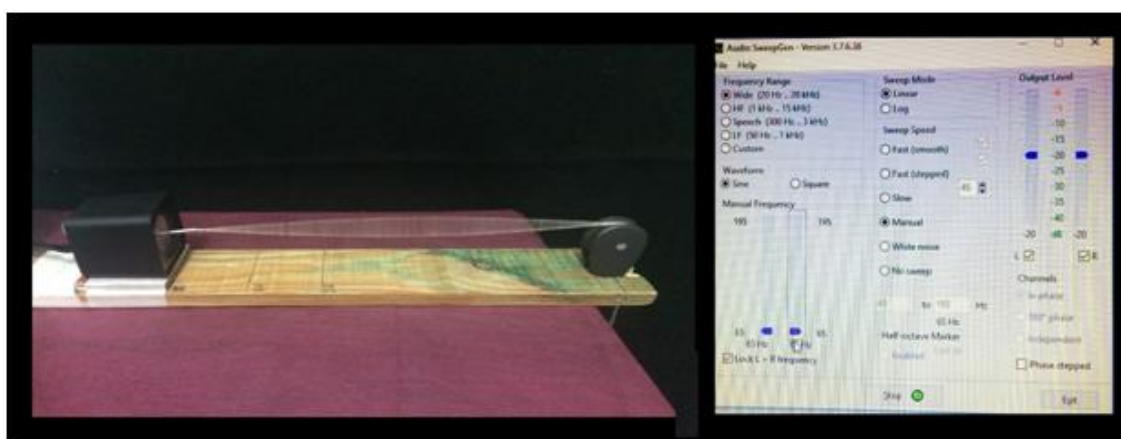
Descrição da montagem

A Montagem consiste de uma base de madeira em que fixamos em uma de suas extremidades uma roldana e na outra extremidade uma caixa de som com aproximadamente 30 cm de distância da polia. O gerador de sinais é proveniente de um software gratuito SweepGen instalado no PC (versão Windows) que faz vibrar uma caixa de som conectada a sua saída de áudio. Um barbante/corda é fixado em um pino colado diretamente na membrana da caixa de som. A corda é tracionada por um peso que poderá ser alterado aumentando e diminuindo a tração na corda. O comprimento da corda pode ser alterado arrastando o alto falante sobre a base de madeira. Para este experimento mantivemos o comprimento $L = 29 \text{ cm}$.

Aplicando o experimento

A coleta de dados se fez com um PC com o software SweepGen e fixamos o comprimento $L = 29 \text{ cm}$. Para a tração fixada obtivemos para vibração fundamental em 65 Hz conforme a Fig. 19

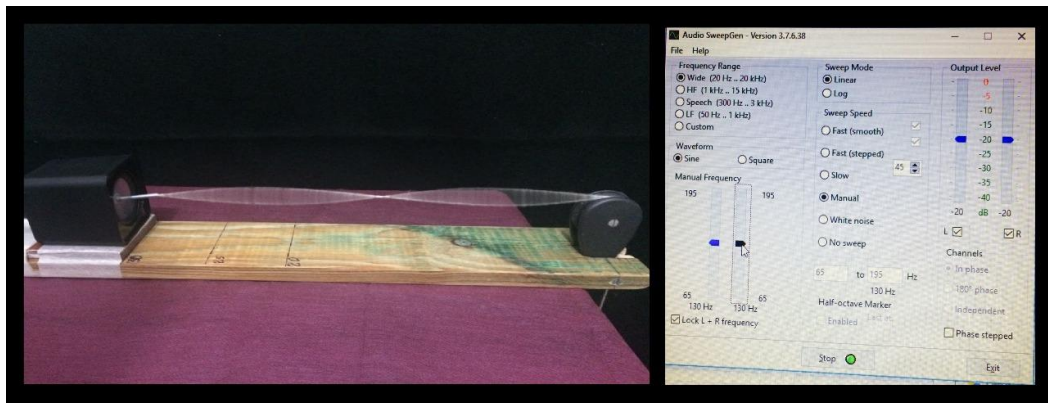
Figura 19 1º Harmônico: a esquerda a indicação no protótipo e a direita a tela do PC com a frequência de 65 Hz.



Fonte: Próprio Autor, 2021.

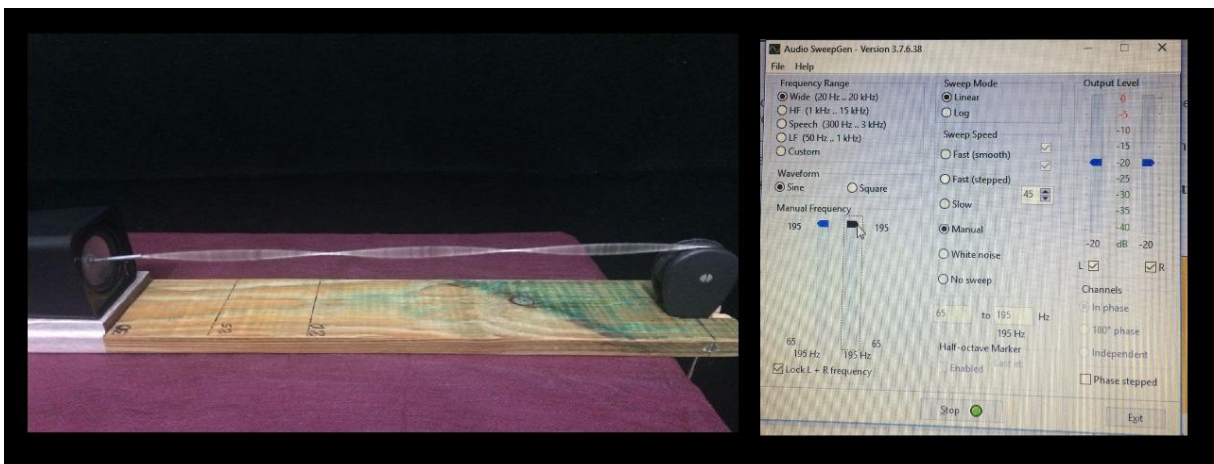
Aumentamos a frequência gradativamente até que se observasse o 2º harmônico frequências, em 130 Hz e em 195 Hz formou-se o terceiro harmônico, Fig. (20) e (21) respectivamente, observando-se conforme proposto teoricamente.

Figura 20 2º Harmônico



Fonte: Próprio Autor, 2021.

Figura 21 3º Harmônico



Fonte: Próprio Autor, 2021

Utilizamos uma balança de precisão de 0,1 g para poder medir o peso amarrado na extremidade do barbante dando esta medida de $(16 \pm 0,05)$ g. Sendo assim precisamos medir a densidade linear da corda. Para determinar a densidade usaremos a Eq. (66)

Onde v é a velocidade de propagação da onda e T a tração do barbante e μ a densidade linear do barbante.

Podemos escrever a densidade linear como:

$$\mu = \frac{T}{v^2} \quad (102)$$

Para determinar a densidade linear do barbante foi considerada a aceleração da gravidade de $9,8 \text{ m/s}^2$, obtendo-se: $(1,11 \times 10^{-1} \pm 5 \times 10^{-5}) \text{ Kg/m}$.

O 2º harmônico terá o comprimento de onda $\lambda = 29 \text{ cm} = 0,29 \text{ m}$ e
Frequência $f = 130 \text{ Hz}$

$$v = 130 \times 0,29 = 37,7 \text{ m/s}$$

$$v^2 = 1406 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$T = mg = 16 \times 10^{-3} \times 9,8 = 0,156 \text{ N}$$

$$\mu = \frac{0,156}{1406} = 1,11 \text{ Kg/m}$$

Para poder comparar foi usado um metro do mesmo material de barbante para medir o peso na balança de precisão, e a massa foi de $0,5 \text{ g} \pm$

Ficando: $5,0 \times 10^4 \text{ Kg/m}$.

Com grandes desvios, o valor obtido empiricamente é quase 5 vezes menor que o valor esperado.

Essa diferença também foi observado no artigo de Cavalcante et al em 2013, e comentou da seguinte forma:

“...foi possível perceber que a origem desta discrepância residia no fato de que a frequência de oscilação da corda em regime estacionário ser igual à metade do valor da frequência fixada no gerador de áudio conectado ao PC. Tal constatação foi possível mediante a análise de vídeos com taxa de aquisição de 300 fps através do software de análise de imagem e movimento Tracker.” (CAVALCANTE, 2013).

Na justificativa do artigo foi que a frequência que de fato ocorria era 2 vezes menor do que a fixada no PC.

Reparemos que na Eq. (102) a velocidade está elevada ao quadrado, assim o termo da frequência que de fato ocorria era $\frac{1}{2}$ elevando ao quadrado, teremos $\frac{1}{4}$. Sendo assim ficando 4 vezes menor.

Para efeitos de compreensão podemos comparar a densidade linear do barbante com de instrumento musical como, por exemplo, violão e guitarra conforma (Santos et al; 2013) Fig. 22. :

Figura 22 Densidade linear da corda Mi do violão e da corda Mi da guitarra

Modos normais - Violão - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (5,53 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,3	165,0	246,8	329,6	411,9	$82,40 \pm 0,03$
5	110,3	221,3	332,0	442,0	552,0	$110,5 \pm 0,05$
10	146,0	294,3	441,0	587,7	734,0	$146,8 \pm 0,08$
15	196,0	396,0	592,3	790,5	990,9	$197,8 \pm 0,10$

Modos normais - Guitarra - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (7,13 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,1	164,5	246,8	329,7	411,1	$82,29 \pm 0,05$
5	109,5	219,1	328,8	438,3	550,6	$109,8 \pm 0,1$
10	145,4	291,3	438,3	584,3	735,3	$146,5 \pm 0,3$
15	193,6	389,0	584,4	783,0	983,0	$195,9 \pm 0,4$

Fonte: (SANTOS, E. M.; MOLINA, C.; TUFAILE, A. P.B, p. 6).

Vemos pela Fig. 22. Que a densidade linear da 6ª corda do violão (Mi) é aproximadamente 10 vezes maior que o barbante utilizado, essa diferença se dá pelo fato da corda de violão suporta uma tensão maior. Assim pode-se compreender o motivo do material desejado para se utilizar no violão, pois se aplicássemos a mesma tensão no barbante ele não iria aguentar e com toda certeza arrebentaria.

Na Fig. 22 também é comparada a densidade linear do violão com a guitarra, o fator do material da corda bem como o comprimento do braço da guitarra ser diferente do violão influenciam, porém podemos até dizer que a tensão na guitarra é maior devido a sua densidade ser maior e poder resistir maior a tensão.

Aplicando-se uma tensão maior ou menor implica na afinação das cordas, por exemplo, quanto maior a tensão a afinação do instrumento sobe e quanto menor a tensão a afinação desce, falando em miúdos quanto maior a tensão maior a frequência e quanto menor a tensão menor a frequência.

Por isso para se afinar um instrumento precisamente usa o afinador (Fig. 23) pois ele dá precisamente a frequência da nota desejada e quão próximo a afinação do instrumento esta.

Figura 23 Afinador tipo clip



Fonte: (VIOLAOGOSPEL, 2022).

5 DESENVOLVIMENTO DO PRODUTO: EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA

5.1 Aplicação em sala de aula

Em meados de Agosto de 2021, depois de dezoito meses sem aulas presenciais, o Governo do Estado do Amazonas autoriza o retorno das aulas presenciais, seguindo alguns protocolos, a saber: trabalhadores e estudantes devem continuar utilizando máscaras durante todo o período dentro das escolas; as unidades escolares devem dispor de pias e totens/dispositivos de álcool gel e sabão para que os estudantes e demais membros da equipe escolar possam higienizar corretamente as mãos; as escolas devem estar equipadas com tapetes sanitizantes e sinalização com os principais protocolos e medidas de segurança e enfrentamento à COVID-19 e dentre outros protocolos de conhecimento geral.

Em novembro de 2021 o projeto foi aplicado na Escola Estadual Professor Roberto dos Santos Vieira, Manaus - AM, em uma turma do 2º ano noturno do EJA durante a Pandemia de COVID-19, ainda com os protocolos e medidas de segurança em voga, tais como o uso de máscaras. Como podemos ver nas Figuras (24), (25) e (26).

A sequência foi elaborada de tal modo que: a primeira foi uma aula teórica expositiva; a segunda de igual modo que a primeira; a terceira foi uma aula com o experimento de baixo custo e a última foi de exercícios para buscar informações de que houve aprendizado. Com o total apoio do professor da turma foi juntada duas turmas do Ensino Médio do 2º ano noturno (EJA) para que tivesse uma quantidade razoável de alunos, pois a falta nas turmas noturnas são maiores somando-se a isso o período de COVID-19 e suas medidas de restrições devido à pandemia.

Aula 1

Figura 24 aplicação do projeto aula 1



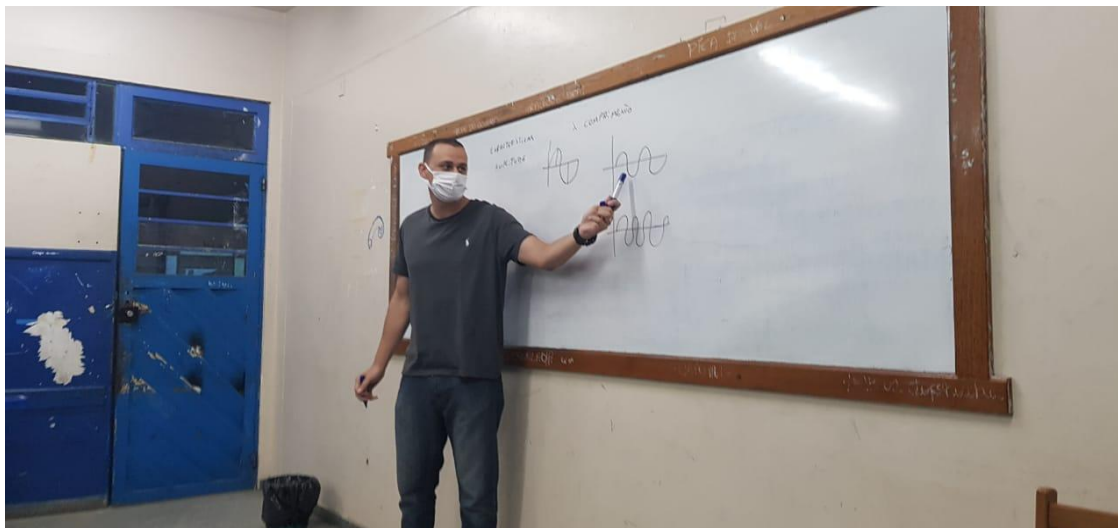
Fonte: Próprio Autor, 2021.

Na primeira aula utilizamos como recursos o quadro e o pincel para exposição dos assuntos teóricos.

Foi abordado conceito de onda, natureza da onda e tipos de onda. Em seguida, os conteúdos de onda e som são introduzidos, como comprimento de onda, período, amplitude e frequência de oscilação de onda, velocidade de propagação, etc. Depois de abordado esses assuntos foram abordados as propriedades do som, altura, intensidade, volume e timbre, fazendo as seguintes relações sobre cada uma das propriedades do som com as características da onda.

Aula 2

Figura 25 aplicação do projeto aula 2



Fonte: Próprio Autor, 2021.

No segundo momento foi explorado o assunto de ondas estacionárias e interferências, aproveitando-se deste momento para estabelecer as relações entre física e o intervalo entre as notas. Para finalizar foi abordada a serie harmônica, mostrando o estado fundamental até o quarto harmônico e correlacionando com as notas e suas respectivas frações. Finalizando a aula correlacionando todos esses detalhes citados com a última propriedade do som que ainda não tinha feito nenhuma correlação, a saber, o timbre.

Aula 3

Figura 26 aplicação do projeto juntamente com o experimento de baixo custo aula 3



Fonte: Próprio Autor, 2021.

Na terceira aula foi levado o experimento de baixo custo sobre ondas estacionárias em cordas, preparado de tal modo a gerar o estado fundamental, com uma frequência de 65 Hz, sua aplicação na música e visualização das frações produzidas por essas ondas estacionárias, como ocorre em instrumentos musicais, como guitarras. Variando a frequência chegando exatamente ao dobro 130 Hz, tem-se o segundo harmônico e se forma dois ventres. Foi falado que seria exatamente a mesma nota apenas uma oitava acima. Logo em seguida foi mostrado o terceiro harmônico.

Logo depois de mostrar o experimento e sua relação com a música foi abordado com os alunos a seguinte relação:

O estado fundamental é a nota dó. O segundo harmônico também é dó. O terceiro harmônico que é $1/3$ do comprimento de onda, ou 3 vezes a frequência do estado fundamental é a nota sol. O quarto harmônico, é o dó mais uma vez, agora 2 oitavas acima, pois foi dobrado duas vezes a frequência. Por fim o quinto harmônico seria nota mi. Ao se juntar essas 3 primeiras notas diferentes, dó , sol e mi a fundamental, o terceiro harmônico e o quinto harmônico respectivamente, teremos um acorde “perfeito maior de dó”. o acorde perfeito maior é o acorde mais harmônico que existe na música, são sons de consonância e geram uma grande sensação de estabilidade.

Outro momento foi usado o simulador da figura 13 para explicar o timbre, conforme o simulador propõe fazendo as relações com o experimento juntamente com a música, abordando-se juntamente com a figura 14 explicando o que seria o timbre de cada instrumento e por isso o timbre é como se fosse a identidade sonora de cada instrumento ou voz humana.

Logo após os comentários pertinentes em relação à música e as características do som aproveitando-se do experimento, que seria uma espécie de braço do violão e que o peso que está na ponta do barbante seria exatamente a chave que faz afinar o violão quando aperta, seria equivalente a colocar mais peso, pois aumenta a tensão, conseqüentemente fazendo mais uma relação, quando aperta mais a chave ou coloca mais massa, aumenta a frequência que é exatamente o que se faz com o violão quando ele esta com sua afinação baixa. Aproveitando-se deste momento para demonstrar a equação $\mu = \frac{T}{v^2}$. Logo abordado o assunto foi proposto a demonstrar aos alunos, como poderíamos calcular esse coeficiente de densidade linear do barbante, usando os mesmos dados que o presente trabalho se propõe.

Aula 4

A Quarta aula foi usada para uma pequena revisão dos conceitos abordados nas aulas anteriores e foi proposto um questionário (Anexo 1) para avaliação dos conteúdos ministrados em aulas, tal questionário tinha 9 questões para avaliar objetivamente os conceitos como também teve 2 questões de caráter subjetivo, com o intuito de avaliar as opiniões e as impressões dos alunos quanto a forma e modo abordado o presente tema. Ressalto que as duas questões foi dado numa folha avulsa sem identificação do nome do aluno, com a intenção de obter as respostas sinceras.

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Conforme o Anexo 1 foram coletados de 19 questionários os seguintes dados das respostas dos alunos, conforme Tabela 1:

Tabela 2 Acertos e erros dos exercícios propostos

Questão	Acertos	Erros	Porcentagem de acertos
1	10	9	52,63%
2	8	11	42,11%
3	12	7	63,16%
4	10	9	52,63%
5	12	7	63,16%
6	6	13	31,58%
7	11	8	57,89%
8	5	14	26,32%
9	7	12	63,16%

Fonte: Próprio Autor, 2021.

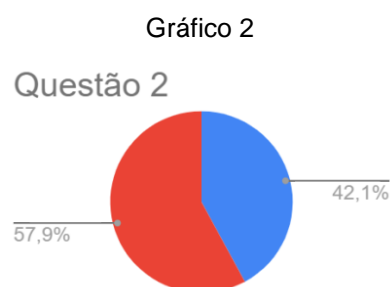
Ao analisar atentamente para cada questão tentando extrair qual o conteúdo cobrado e as respostas faz-se os seguintes comentários:

Na questão de numero um, o assunto cobrado foi propriedades do som, juntamente com seus conceitos físicos, era para julgar três itens como verdadeiros ou falsos. Obtivemos como a resposta correta a letra “a” com dez alunos respondendo nessa letra com 52,63% das respostas corretas. Porém o item III relacionada à voz aguda com alta intensidade, que de fato é falso. Comentários de alunos que erraram a questão foram de que confundiram a intensidade, propriedade do volume do som com a frequência, algo muito comum entre muitos alunos, destes nove que erraram, sete responderam a letra d, justamente a resposta que distingue quem não se confundiu. Portanto, apenas dois alunos ao analisar atentamente não conseguiram absorver o conteúdo.



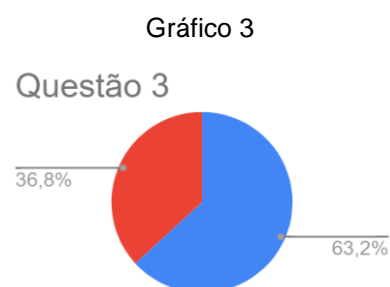
Fonte: Próprio Autor

Na questão de numero dois foi cobrada outras propriedades do som aplicadas ao instrumento musical violão, tendo oito acertos com uma porcentagem de 42,11%, sendo como resposta correta a letra c, dos onze erros, cinco colocaram como resposta a letra d, alguns não sabiam o que era “boca” do violão e não perguntaram, achando que seria a parte que afina o violão.



Fonte: Próprio Autor

Na questão de numero três foi uma pergunta direta relacionando os graves e agudos com uma propriedade do som, tendo como resposta correta a letra b. Doze acertos tendo um percentual de 63,16%.



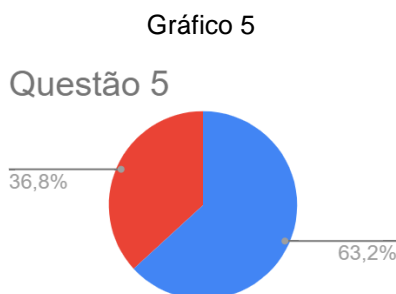
Fonte: Próprio Autor

Na questão de numero quatro, foi cobrado mais características do som de modo direto sobre sons fortes, baixos e timbre. Tendo como resposta correta a letra **a**, sendo 10 respostas certas com uma porcentagem de 52,63%.



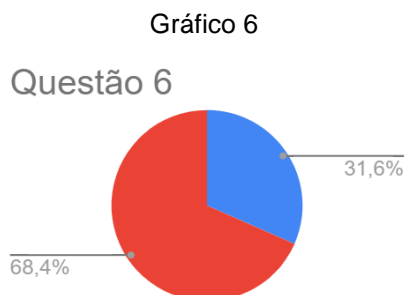
Fonte: Próprio Autor

Na questão de numero cinco cobrava o conceito direto e objetivo sobre o timbre sendo uma característica única de cada instrumento musical. Tendo como resposta correta a letra **a**, sendo doze respostas corretas com uma porcentagem de 63,16%.



Fonte: Próprio Autor

Na questão de numero seis cobrava mais propriedades do som. Tendo como resposta a letra **a**, tendo somente seis acertos com uma porcentagem de 31,58%. Cabe ressaltar que se tratava de uma questão ao qual seria julgado 3 itens, alguns julgaram a primeira sentença verdadeira, que dizia que o som se propagava no vácuo.



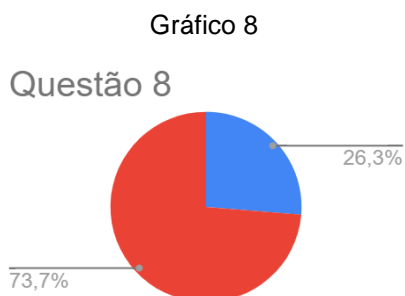
Fonte: Próprio Autor

No sétimo item foi abordado o mesmo tema que o item 5 de forma diferente, tendo como resposta certa a letra b. Onze respostas corretas tendo um percentual de 57,89%.



Fonte: Próprio Autor

No item de numero oito, foram cobradas ondas estacionárias com a fórmula de seus harmônicos, dando uma tabela para relacionar a frequência obtida com a nota da tabela, tendo como resposta a letra d, sendo somente cinco acertos com uma porcentagem de 26,32%.



Fonte: Próprio Autor

Por fim o item de número nove cobrou outra questão de ondas estacionárias de modo diferente, tendo como resposta a letra c, sendo sete acertos tendo como 36,84%.



Fonte: Próprio Autor

Diante das questões de número 8 e 9 vemos uma porcentagem de acerto menor, tais questões envolveram cálculos. O professor da turma disse que os alunos tinham muitas dificuldades em cálculos.

No questionário de respostas subjetivas dos alunos para a pergunta de número 1, foi obtido algumas respostas:

Aluno1: “Sim, ajuda”. Fica bem melhor para se compreender.

Aluno2: “Na minha opinião, acho que ajuda mais na aprendizagem sobre musica.

Aluno3: “ Na minha opinião sim, até porque nos ajuda muito em relação ao timbre e notas musicais e etc...”

Aluno4: “Ajuda, pois eu não havia estudado sobre. Ajudou na aprendizagem.”

Aluno5: “Acredito que ajuda para quem já possui alguma experiência com musica, mas para os leigos usar a física para representar algo um pouco abstrato acaba por confundir um pouco para os que tem alguma dificuldade.”

Aluno6: “Facilita muito, porque sou músico e desse conteúdo consegui aprender muitas coisas novas e irei colocar em prática o que aprendi.”

Aluno7: “Facilita, podemos ver a matéria de física de maneira melhor onde fica bem mais fácil de se aprender sobre a matéria.”

Aluno8: “Na minha opinião ela ajuda e facilita ajuda pra quem ainda não tem conhecimento sobre notas e facilita pra quem tem já um pouco de conhecimento sobre musica.”

Aluno9: “Facilita por que todos nós gostamos de usar músicas para fazer tudo em casa.”

Aluno10: “ajuda muito!! Apesar que é um pouco difícil, mas ajudou muito.”

Para a questão de numero 2 tivemos alguns comentários:

Aluno1: “Não tenho nenhuma crítica a fazer. Não gosto de física, mas gosto de música! Depois que junta os dois até que fica algo agradável. Sinto ate mais vontade para responder as questões.”

Aluno2: “Não tenho nenhuma crítica, o trabalho do professor é muito bom e ajudou mais na aprendizagem.”

Aluno4: “ Foi bom, é sempre bom aprender sobre som, frequência etc. foi muito bem explicado.”

Aluno5: “Tentar explicar física com experimentos mecânicos é uma excelente ideia, seria bom ver mais desses exemplos pois une curiosidade com distração, acaba por ser mais fácil de lembrar e entender melhor como a dinâmica da física funciona.”

Aluno6: “Algumas coisas não consegui captar, e as questões não foram o que esperava sobre o assunto.”

Aluno10: “Bom eu não entendo muito disso, mas só falta saber explicar de forma bem adequada.”

Pode-se observar que foram cobradas questões teóricas, não obtivemos em nenhuma questão um acerto maior que 70% de toda turma, na maioria tivemos um índice até que regular. Em algumas questões tivemos uma grande porcentagem inferior de 50% de acertos mesmo em questão que não envolve muitos cálculos. Diante desse comentário temos que levar em conta que, o presente projeto foi aplicado em turma noturna, tendo como consequência a diminuição do tempo de aula, fazendo com que a aula fique mais corrida. Outro fator importante a se levar em conta é que a turma é do EJA, tendo alunos um pouco mais velhos, alguns reprovados anos anteriores e também muitos alunos que trabalham durante o dia.

O professor da turma fez o seguinte comentário: “Faça questões mais teóricas e fáceis eu conheço minha turma, é complicado e difícil trabalhar, muitos aqui não conseguem nem fazer operações simples de matemática”. Tal comentário foi levado em conta, daí a preocupação em fazer mais questões que conseguem avaliar os conteúdos teóricos.

Ao analisar algumas respostas de cunho subjetivo de alguns alunos pode-se perceber que no geral gostaram da forma que foi abordado e ficaram mais receptivos para aprender por associar com a música e com o experimento, apenas alguns não gostaram. Levando-se em conta a recepção dos alunos, pode-se inferir que a ideia e a concepção de abordar o tema juntamente com a música pode ser uma boa ferramenta, cabendo ao professor conhecer a turma e mudar a forma de abordar os conteúdos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vale ressaltar que não se pôde fazer um pré-teste, para que se possa ter um parâmetro de comparação. Como destacado no tópico 5.1, devido às escolas estarem fechadas por mais de um ano e meio, os alunos ficaram sem ver o conteúdo aqui abordado durante o ano letivo, sendo assim, não poderíamos aplicar um pré-teste, sendo que eles não tiveram o assunto ministrado. Deste modo, o professor da turma disse que já era fim de ano e não poderia ceder mais aulas, e que iria aproveitar o projeto como nota na turma, sendo assim as aulas do projeto foram as próprias aulas do ano letivo.

Essa sequência didática foi elaborada como uma proposta de ensino para os professores de ensino médio que pretendem dar uma aula diferenciada, buscando uma interdisciplinaridade com a música. Nesse aspecto, pela tendência natural humana pelo gosto da música, os alunos tendem a estarem mais abertos para o aprendizado e a partir daí o professor colocará os conceitos físicos aqui abordados.

A sequência foi concebida de modo que as primeiras aulas são conhecimentos e conceitos que serão usados nas últimas aulas, assim como no experimento. O material é uma sugestão, mas pede-se que os conceitos sejam ministrados de modo cronologicamente iguais.

Vale salientar que o produto aqui apresentado de nenhuma forma está acabado, pois ele serve como um guia, material de apoio e pode ser usado parcial ou integralmente, ficando a critério do educador como irá usar o presente material. Podem-se usar simuladores, outros experimentos que enriqueçam as aulas.

Portanto, esta dissertação serviu de relato empírico, conforme o esperado para um curso de Mestrado. Os educadores podem usar os produtos educacionais produzidos aqui, no todo ou em partes, para refletir os aspectos básicos e teóricos associados à construção do conhecimento ao aluno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Mauro Sérgio Teixeira de; ABIB, Maria Lúcia Vital dos Santos. Atividades experimentais no ensino de física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. São Paulo, v. 25, n. 2, p. 176-194, Junho. 2003.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

AXT, Rolando; MOREIRA, Marco Antônio. O ensino experimental e a questão do equipamento de baixo custo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**. Porto Alegre, v.13, n.1, p.97-103, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

BORGES, NICOLAU. Blogspot: Os Fundamentos da Física: Conceito de Onda. Natureza das ondas. Tipos de ondas, 2013. Cursos do blog termologia óptica e ondas. Disponível em: <http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2013/11/cursos-do-blog-termologia-optica-e-ondas_19.html>. Acesso em: 26 de dez. de 2021.

CHIERECCHI, R. O Som da Física. 2013. 224 p. Dissertação (Mestrado Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo.

(CAVALCANTE, 2004) M. A. Cavalcante, C. R. C. Tavoraro, **Ondulatória e acústica através de experimentos assistidos por computador**. In: Anais do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física, Jaboticatubas, MG, 2004.

CAVALCANTE, M. A.; PEÇANHA, R.; TEIXEIRA, A. C. **Ondas estacionárias em cordas e determinação da densidade linear de um fio**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 2, 2013.

CONSERVATÓRIO. Propriedades do som. Homepage teoria musical. Disponível em: <https://conservatorio0.tripod.com/propriedades_do_som_.htm>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

DESCOMPLICANDO A MÚSICA. Notas de teclado e piano, 2021. Homepage. Disponível em: <<https://www.descomplicandoamusica.com/notas-de-teclado-e-piano/>>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B, SANDS, M., **Lições de Física de Feynman**. Edição definitiva Vol II, editora Bookman, 2008.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática docente. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GASPAR, Alberto; MONTEIRO, Isabel. Atividades experimentais de demonstração em sala de aula: uma análise segundo o referencial da teoria de Vygotsky. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 10, n°. 2, p. 227-254, 2005.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., **Fundamentos de física 2**. 9ª edição, vol. 2, editora LTC, 2012.

H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica 2: **Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**, 4a edição, Editora Edgard Blücher, 2002.

LERIAS, Washington Roberto *A física da música e a pluralidade didática*. 2016. 54 f p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física. Campo Mourão, 2016.

MALLEY, Chris. University of Colorado Boulder: Fourier - Fazendo ondas, 2021. Phet Interactive Simulations. Disponível em: <https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/fourier-making-waves/credits>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Projeto Voaz – Física – volume único*. Parte 3. Ed. Scipione. 2013.

MORAES, A.M; MORAES, I.J. (2000). “A avaliação conceitual de força e movimento”. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 22 (2): 230.

MOREIRA, M.A. (1983). *Uma abordagem cognitivista ao ensino da Física*. Porto Alegre: Editora de Universidade.

NETTO, Luiz Ferraz. Feira de Ciências: Tubos sonoros tocados à mão, 1999. Homepage. Disponível em: <https://musicaeadoracao.com.br/recursos/arquivos/tecnicos/matematica/www.feiradeciencias.com.br/sala10/10_15.htm>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

PRADO, L. A. G. *Matemática, física e música no Renascimento*: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar. 2010. 110 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PEREIRA, R. A. *A física da música no renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica*. 2010. 107 p. Dissertação (Mestrado Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PINTO, Carla Alexandra Moreira *Soluções da Equação de onda Unidimensional*. 2013. 93 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Aveiro. Aveiro. Campo Mourão, 2013.

RAMALHO, NICOLAU, TOLEDO, **Fundamentos da física 2**. . 9ª edição, vol. 2, Editora Moderna, 2007.

ROQUE, Antônio. USP: A Equação de onda em uma dimensão, 2021. Anotações de aulas – Física II – Ondas, Fluidos e Termodinâmica. Disponível em: <<http://sisne.org/Disciplinas/Grad/Fisica2FisMed/aula16.pdf> >. Acesso em: 26 de dez. 2021.

SANTO, Angelo. Blogsantoangelo: Onda amplitude frequência harmônicos e timbre, 2016. Homepage. Disponível em: <<https://blog.santoangelo.com.br/onda-amplitude-frequencia-harmonicos-timbre-parte-2/>>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

SANTOS, E. M.; MOLINA, C.; TUFALÉ, A. P.B. Violão e guitarra como ferramentas para o ensino de física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 25, n. 2, 2570, Publicado em: 30 de Maio de 2013. Disponível em: <<https://www.scielo.br/j/rbef/a/9gXDFQkMNF4CrhnjgtMJ76r/?lang=pt#>>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio Souto de. **Análise de Fourier: Um livro colaborativo**. 2020

SERÉ, Marie-Geneviève; COELHO, Suzana Maria; NUNES, Antônio Dias. O Papel da Experimentação no Ensino de Física. In: **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**. Florianópolis/BRA. v. 20, n.1, p.31-42, 2003.

SILVA, Domiciano Correa Marques. Mundo Educação: Função de onda, 2021. Disponível em: <<https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/funcao-onda.htm>>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

SÓFÍSICA. Componentes de uma onda, 2008. Virtuuous Tecnologia da Informação, Disponível em: <<http://www.sofisica.com.br/conteudos/Ondulatoria/Ondas/classificacao2.php>>. Acesso em: 26 de dez. 2021.

TANAKA, Hugo Shiguelo. Comprimento de onda. Todo Estudo. Disponível em: <<https://www.todoestudo.com.br/fisica/comprimento-de-onda>>. Acesso em: 26 de dez. de 2021.

VALLI, Emilio. LinkedIn: effective social peacebuilding needs 'ripple effects', 2015. Perfil social. Disponível em <<https://www.linkedin.com/pulse/effective-social-peacebuilding-needs-ripple-effects-emilio-valli>>. Acesso em: 26 de dez. de 2021.

VENTURA, Daniel Rodrigues. Formação, propagação e fenômenos ondulatórios – Ondas transversais, ondas longitudinais e efeito Doppler. Portal do Professor, 2011. Disponível em: <<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=33327>>. Acesso em: 26 de dez. de 2021.

VIOLAOGOSPEL. Como Afinar o Violão, 2022. Homepage Aulas de Violão Gospel. Disponível em: <<https://violaogospel.com/como-afinar-o-violao/>>. Acesso em: 05 de mar. de 2022.

ANEXO 1

Nome:

Turma:

Período:

1. **(EEAR-2020 adaptada)** As ondas sonoras podem se propagar em diversas frequências. Considerando as qualidades do som, analise as afirmações a seguir.

I – O som é mais grave quanto maior for a sua frequência.

II – Sons de mesma altura e mesma intensidade emitida por fontes sonoras distintas podem ser diferenciados através de seus respectivos timbres.

III – Dizer que uma mulher tem voz aguda é o mesmo que dizer que o som que é emitido por ela é de alta intensidade.

Está correto o que se afirma em:

- a) II, somente
- b) I, somente
- c) I, II e III
- d) II e III

2. **(ITA–2021 adaptada)** Um violão é um instrumento sonoro de seis cordas de diferentes propriedades, fixas em ambas as extremidades, acompanhadas de uma caixa de ressonância. Diferentes notas musicais são produzidas tangendo uma das cordas, podendo-se ou não alterar o seu comprimento efetivo, pressionando-a com os dedos em diferentes pontos do braço do violão. A respeito da geração de sons por esse instrumento são feitas as seguintes afirmações:

I – Uma corda de nylon e uma de aço, afinadas na mesma frequência fundamental, geram sons de timbres distintos.

II – Ao pressionar uma corda do violão, o musicista gera um som de frequência maior e comprimento de onda menor em comparação ao som produzido pela corda tocada livremente.

III – Quando o musicista pressiona a corda do violão, quanto mais próxima da “boca” do violão mais grave é o som.

Considerando V como verdadeiro e F como falsa, as afirmações são respectivamente.

- a) FVF
- b) VFV
- c) VVF
- d) VVV

3. **(NUCEPE/UESPI–SEMEC-2019)** A altura de um som musical corresponde à sensação que permite distinguir os sons mais graves dos mais agudos. Qual é, então a característica física de uma onda sonora associada à altura do som?

- a) Volume
- b) Frequência
- c) Amplitude.
- d) Intensidade

4. **(FUNDEP-2019)** Considere que João está gritando quando seu professor de Física entra na sala de aula. Aproveitando a última aula sobre ondas sonoras, seu professor o adverte:

“- João, que som forte e baixo! De longe reconheci seu timbre!”

As palavras destacadas na fala do professor se referem, respectivamente, a

- a) Amplitude, frequência e forma da onda.
- b) Forma da onda, amplitude e frequência.
- c) Frequência, amplitude e forma da onda.
- d) Comprimento de onda, frequência e forma a onda.

5. **(EEAR–2019)** Assinale a alternativa que completa INCORRETAMENTE a frase abaixo.

Em uma orquestra formada por vários instrumentos musicais é possível que instrumentos diferentes emitam sons com _____ iguais.

- a) Timbres
- b) Frequências
- c) Intensidades
- d) Comprimentos de ondas

6. **(CPCON UEPB–Prefeitura de Cuitegi-2019)** O som é uma onda longitudinal, que se propaga em um meio material, sendo que, para ser produzido, um corpo material tem que vibrar. Por exemplo: quando uma pessoa fala, o som que ela emite é produzido pelas vibrações de suas cordas vocais. Sobre os fenômenos sonoros são feitas as seguintes afirmações.

I – O som pode se propagar em um meio material qualquer, entretanto, ao contrário do que acontece com a luz, o som não se propaga no vácuo.

II – Quando um rádio está ligado com seu volume máximo, dizemos que o som por ele emitido é de grande intensidade.

III – A frequência de um som caracteriza sua percepção como grave ou agudo. Um som de pequena frequência é agudo e um som de grande frequência é grave.

É verdade o que se afirma apenas em

- a) I e II
- b) I
- c) II
- d) II e III
- e) III

7. **(EEAR-2020)** Um professor de música esbraveja com seu discípulo: “Você não é capaz de distinguir a mesma nota musical emitida por um violino e por uma viola!”. A qualidade do som que permite essa distinção à que se refere o professor é a (o)

- a) Altura.
- b) Timbre.
- c) Intensidade.
- d) Velocidade de propagação.

8. **(IDECAN–SEARH-2016 adaptada)** Uma corda de violão de comprimento L produz ao ser tocada um som cuja frequência é 247,5 Hz. Diminuindo pela metade o comprimento da parte vibrante, o novo som produzido ao se tocar essa corda de acordo com a tabela corresponde à nota:

Nota	Frequência (Hz)
dó	264
ré	297
mi	330
fá	352
sol	396
lá	440
si	495
dó	528

- a) Dó

- b) Ré
- c) Sol
- d) Si

9. **(IFPA-Técnico de laboratório-2016)** Um violinista com o intuito de afinar seu violão utiliza um diapasão de 440 Hz, o qual, se aproximando de uma das cordas, de comprimento 1,0 m, esta entra em ressonância formando um padrão de onda estacionária contendo cinco nós e quatro ventres (4º harmônico). Dessa forma, a velocidade da onda na referida corda, em m/s, vale:

- a) 55
- b) 110
- c) 220
- d) 440
- e) 880

Questionário sobre a metodologia.

1. Em sua opinião o conteúdo de física abordado juntamente com a música, ajuda na aprendizagem ou facilita? Faça seus comentários.

2. Faça suas críticas, sugestões ou comentário que deseja dessa forma que foi abordado o conteúdo de física.

APÊNDICES



MNPEF
Mestrado Nacional
Profissional em
Ensino de Física



UFAM

LELYZ SANTOS

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: EXPLORANDO A FÍSICA NA MÚSICA

MANAUS – AM

2021

APRESENTAÇÃO

O produto é fruto de uma dissertação do Programa de Pós-graduação de Física, Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física – MNPEF, polo 04, IFAM/UFAM.

O Trabalho foi desenvolvido com a intenção de sugerir uma sequência didática em ensino de física que pudesse ser interessante, atrativa e produtiva para o aluno, para que outros professores possam reproduzir parcial ou integralmente, ou adaptá-la de acordo com seus conhecimentos e interesses.

A sequência didática foi concebida em quatro aulas de cinquenta minutos: as duas primeiras expositivas e teóricas; a terceira experimental; e a quarta é de aplicação de questões para averiguar os conhecimentos aprendidos.

A escolha do tema tem a finalidade de explorar ao máximo os conceitos de ondulatória aplicada à teoria musical, fazendo assim uma interdisciplinaridade com a música, aproveitando-se do interesse natural para a música, despertando o interesse nos alunos de conhecer os conceitos físicos mais a fundo.

SUMÁRIO

Aula 1	4
Natureza das ondas.....	5
Tipos de ondas.....	5
Características das ondas.....	6
SOM.....	7
Qualidades fisiológica do som.....	8
Aula 2	10
Interferência de ondas.....	10
Ondas estacionárias.....	11
Pitágoras e os instrumentos com cordas.....	13
Aula 3	18
Experimento de baixo custo.....	18
Descrição da montagem.....	19
Aula 4	21
Exercícios propostos resolvidos.....	21
CONSIDERAÇÕES FINAIS	28
REFÊRENCIAS	29

Aula 1

Conceito de onda

O estudo de fenômenos ondulatórios é um dos conceitos mais importantes da física.

Em sua obra, Fundamentos da Física, Halliday descreve a importância deste conceito para esta ciência:

Para se ter uma ideia da importância das ondas no mundo, basta considerarmos a indústria musical. Toda música que escutamos, de um samba de rua a um sofisticado concerto sinfônico, envolve a produção de ondas pelos artistas e a detecção dessas ondas pela plateia. Da produção a detecção, a informação contida nas ondas pode ser transmitida por diversos meios (como no caso de uma apresentação ao vivo pela internet) ou gravada ou reproduzida (através de CDs, DVDs, etc). A importância do controle de ondas musicais é enorme e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas pode ser muito generosa. página 117 (Fundamentos da Física - Halliday – 2 Volume – 9 Edição, 2012)

Fig. 1 propagação de ondas



Fonte: (VALLI, Emilio, 2015, p. 1).

Qualquer objeto que pode gerar ruído é denominado fonte. E onda transporta apenas energia e não matéria.

Natureza das ondas

Quanto à natureza da onda, existem dois tipos: mecânica ou eletromagnética.

Ondas mecânicas: Estas são variedades que precisam de um meio material para propagação e não se propagam no vácuo. Essas são as mais conhecidas. Exemplos: Ondas sonoras, ondas em cordas, em cuba de ondas, etc.

Ondas eletromagnéticas: Não necessitam de um meio de propagação. Elas são causadas por cargas elétricas oscilantes. Exemplos: Antena de transmissão de rádio ou de televisão ; micro-ondas, raios-X e luz.

Tipos de ondas

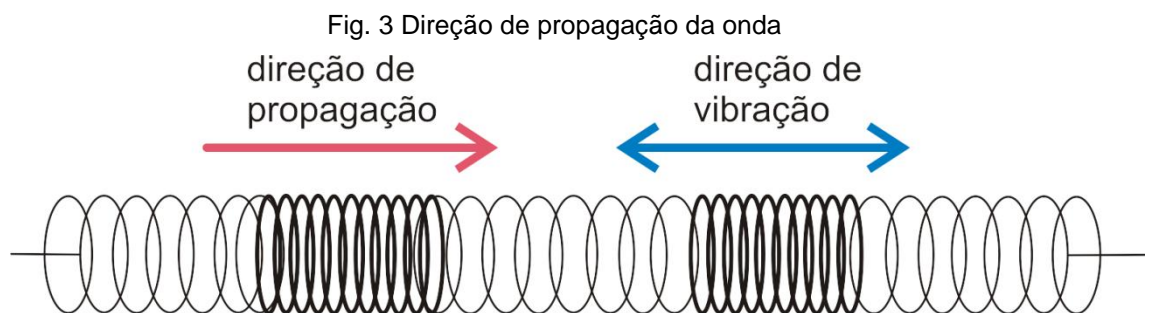
Ondas Transversais: Transmite na direção perpendicular, na direção da oscilação.



Pulso transversal realizado por uma mola.

Fonte: (VENTURA, Daniel Rodrigues, 2011, p.1).

Ondas longitudinais: Elas se propagam na mesma direção da vibração. O som viaja em gases e líquidos por ondas longitudinais.



Fonte: (BORGES, NICOLAU, 2013, p. 1).

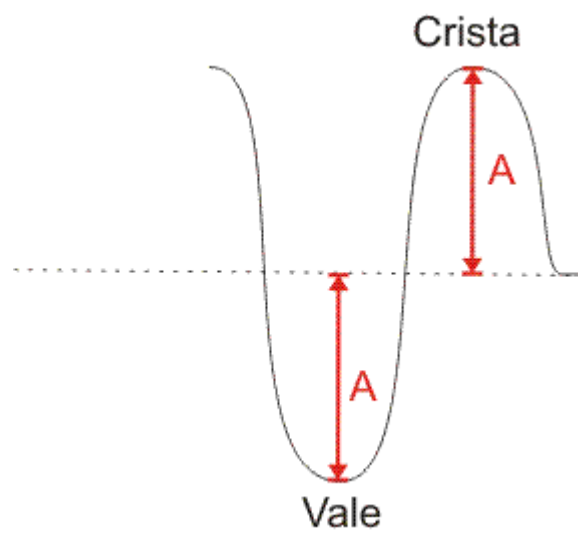
Conforme mostrado na Figura 3, a onda viaja no sentido horizontal. E, qualquer ponto da mola, também, se propaga da esquerda para a direita na

horizontal. Quando as ondas estão na mesma direção, falamos de ondas longitudinais.

Características das ondas

Amplitude: A amplitude é dada pelo ponto mais alto da onda chamado crista. Assim também como no ponto mais baixo da onda, chamado vale.

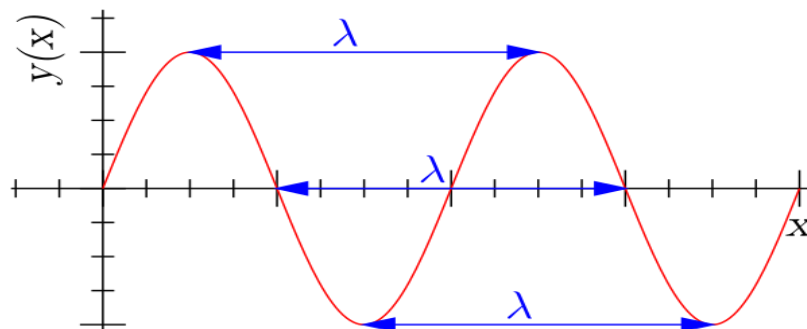
Fig. 4 Vale e crista da onda



Fonte: (SÓ FÍSICA, 2008).

Comprimento de onda (λ): O comprimento de onda representado pela letra grega λ (Lâmbda), mede a distância entre duas cristas consecutivas ou dois vales, também, consecutivos ou de um nó a outro.

Fig. 5 Comprimento de onda



Fonte: (TANAKA, Hugo Shigueo. 2021).

Período (T): É o tempo em que se leva para ser criado um comprimento de λ .

Velocidade (v): Toda a onda possui sua velocidade de propagação, geralmente, depende do meio, para calcularmos temos que dividir o comprimento da onda pelo período.

$$v = \frac{\lambda}{f}$$

Frequência (f): É o número de oscilações de uma onda, em um determinado tempo, e sua unidade de medida é hertz (Hz.).

SOM

É o som é uma onda mecânica que depende de meio material para se propagar. Os dispositivos que emitem ondas sonoras são chamados de fontes sonoras. A propagação do som é tridimensional, além disso, o som é uma onda transversal.

O sistema auditivo de uma pessoa normal é sensibilizado por ondas sonoras de frequências entre aproximadamente, 20 Hz e 20.000 Hz. As ondas sonoras nesta faixa audível costumam ser denominados sons. Esses limites são convencionais, dependendo, entre outros fatores, da idade da pessoa.

As frequências inferiores a 20 Hz são denominadas infrassons e ocorrem, por exemplo, precedendo os abalos sísmicos. Certos animais têm ouvidos sensíveis a essas ondas, como os cavalos e os elefantes.

Ondas sonoras com frequências superiores a 20.000 Hz constituem os ultrassons. Embora não sejam audíveis para o homem, muitos animais podem ouvi-los, como cachorros, gatos, morcegos e outros.

Qualidades fisiológicas do Som

Nosso aparelho auditivo distingue no som certas características, denominadas qualidades fisiológicas, que são: altura, intensidade e timbre.

Altura

A qualidade pela qual diferenciamos sons graves de agudos é denominada altura. Ela depende apenas da frequência do som.

O som será tanto mais grave quanto menor for a sua frequência. Ele será tanto mais agudo quanto maior for a sua frequência. Por exemplo, o homem costuma emitir sons entre 100 e 200 Hz, e a mulher, sons entre 200 e 400 Hz. Dizemos então que a voz do homem é mais grave que a da mulher ou que a voz da mulher é mais aguda que a do homem.

Intensidade

A qualidade fisiológica pela qual diferenciamos os sons fracos dos sons fortes é denominada intensidade auditiva ou sonoridade, ou ainda nível sonoro do som. Depende de energia transportada pela onda sonora e, portanto de sua intensidade física.

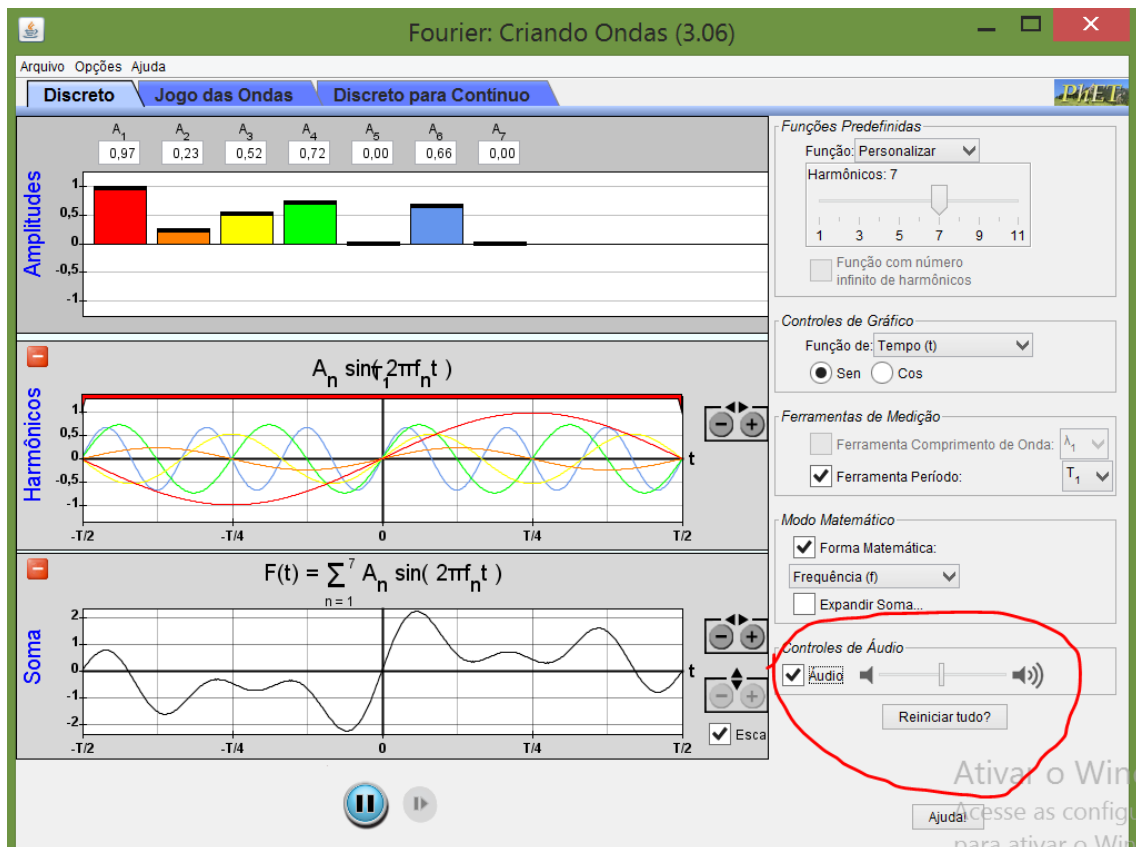
Vale destacar neste momento a comparação da amplitude com a intensidade.

Timbre

Quando um instrumento musical emite determinada nota, diversos sons de frequências múltiplas se superpõem para constituir essa nota dos quais, os de frequências menores constituirão o som fundamental, e os demais, com frequências múltiplas, serão os harmônicos. Assim, sendo f^1 a frequência do som fundamental, podemos ter o segundo harmônico ($f^2 = 2f^1$), o terceiro harmônico ($f^3 = 3f^1$) e assim por diante. A superposição do som fundamental com os harmônicos determina a forma da onda emitida pelo instrumento, como se representa na figura abaixo.

Temos na Fig. 6, um simulador disponível de forma livre e gratuito, do site <https://phet.colorado.edu/pt_BR/> desenvolvido por Chris Malley, que se pode observar um exemplo da Série de Fourier.

Fig. 6 exemplo de formação de um timbre sintetizador



Fonte: (MALLEY, Chris, 2021).

O som fundamental ou primeiro harmônico está sempre presente e é ele que determina a frequência do som emitido. Os harmônicos acompanhantes do som fundamental mudam de acordo com a fonte geradora do som, ou seja, cada instrumento possui os seus harmônicos específicos. É essa característica que torna distintos, para o ouvinte, sons de mesma altura (mesma frequência) emitidos por instrumentos diferentes, mäs que esses sons tenham a mesma intensidade. A essa propriedade do som damos o nome de timbre.

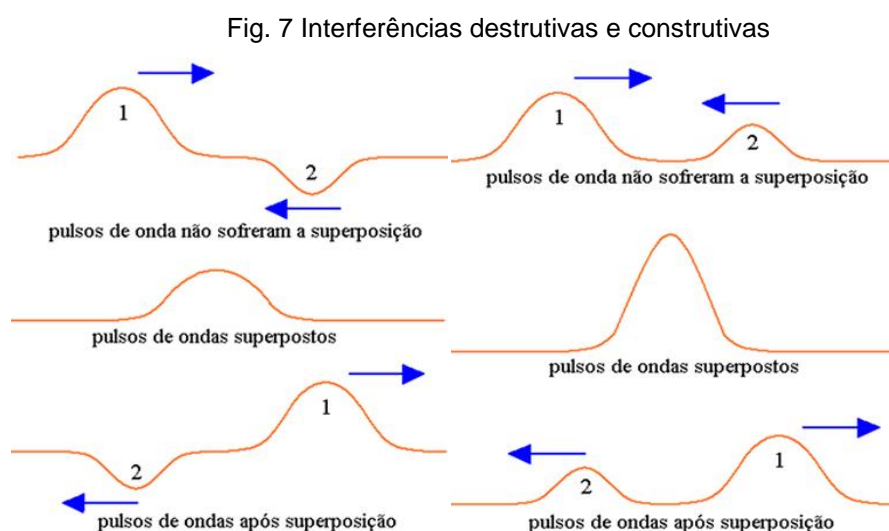
Aula 2

Interferência de ondas

Quando pegamos uma extremidade livre e fazemos um movimento de sobe e desce com a corda, teremos a formação de ondas que se propagam nela. Pegando-se duas pessoas e juntamente com elas uma corda e cada uma segurando a uma extremidade da corda, quando começarem a executar um movimento de sobe e desce, vamos ter as ondas se formando cujas propagações ocorrem no mesmo sentido. Mas o que acontece quando essas ondas se encontram? Acontece o fenômeno que chamamos de interferência de ondas.

Se pegarmos dois pulsos que se cruzam no meio do caminho. O que aconteceria?

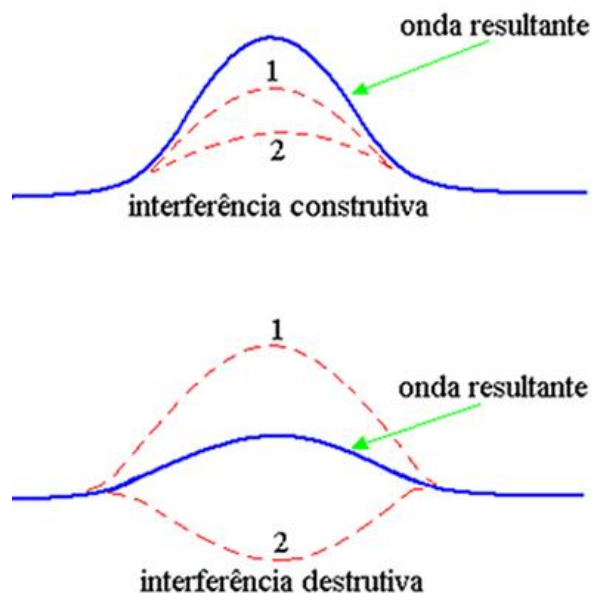
Onde ocorre a superposição, o efeito resultante é a soma dos efeitos que seriam produzidos pelas ondas que se superpõem, caso atingissem isoladamente aquele ponto. Após a superposição, cada onda continua sua propagação no meio, com suas propriedades inalteradas. Veja o exemplo:



Fonte: (SILVA, Domiciano Correa Marques, 2021).

Os efeitos do fenômeno da superposição quando as ondas se cruzam é denominado interferência. Pode-se dizer que temos dois tipos de interferência: Construtiva e Destrutiva. Veja o exemplo:

Fig. 8 onda resultante



Fonte: (SILVA, Domiciano Correa Marques, 2021).

Na interferência construtiva iremos ter uma sobreposição de modo que as amplitudes se somarão, sendo assim a amplitude da onda resultante sempre será maior que das ondas que a compõe.

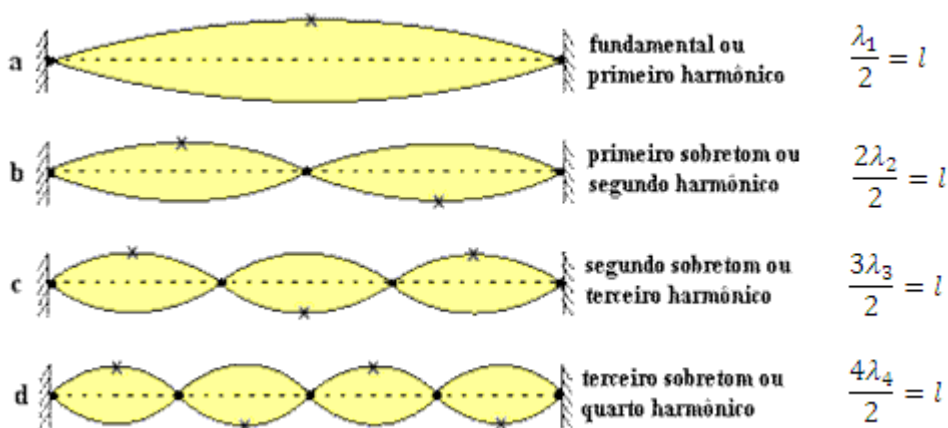
No caso da interferência destrutiva as ondas se cancelaram gerando uma nova onda que deverá ser menor que pelo menos uma das ondas que a geraram. Sendo uma interferência destrutiva parcial, ainda haverá uma onda resultante pequena, havendo uma interferência destrutiva total, não existirá onda resultante, geralmente esses casos ocorrerão quando as ondas em sentidos contrários possuem as mesmas amplitudes.

Ondas estacionárias

Quando ocorre um caso específico de interferência de onda, que seja, ondas que possuem: Frequência; comprimento de onda; amplitude iguais e que estejam em sentidos opostos, estaremos no caso de ondas estacionárias.

Ao analisarmos a Fig. 9 estamos diante de ondas estacionárias. Pontos de amplitudes mínimos e denominado nós e a “barriga” entre esses dois nós é denominado ventre. Nos pontos de interferências destrutivas, teremos os nós. Nos pontos de interferências construtivas iremos ter os ventres.

Fig. 9 ondas estacionárias e seus harmônicos.



Fonte: (NETTO, Luiz Ferraz, 1999).

Na figura acima podemos ver as formações do que chamamos de harmônicos e a relação com o comprimento de onda de cada harmônico.

Podemos encontrar a velocidade de propagação de onda em uma corda uniforme, se souber a densidade linear desta corda e a tensão exercida nela, a exemplo, um violão.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

A onda estacionária, em seu harmônico fundamental, apresenta uma formação diferente de uma onda, isso porque estamos vendo apenas metade da onda.

Dessa forma, o comprimento de onda de uma onda estacionária é encontrado após três nós consecutivos ou dois ventres.

Uma forma de encontrar o harmônico é contando a quantidade de ventres que aparecem e vice-versa. Assim, o comprimento da corda para que ocorra uma onda estacionária deve ser um múltiplo inteiro ($n = 1, 2, 3, \dots$) da metade do

comprimento de onda (λ). Da seguinte maneira, conseguimos relacionar o comprimento de onda com o tamanho da corda:

$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

As frequências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda podem ser calculadas

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots,$$

Onde v é a velocidade das ondas progressivas na corda.

Esta equação nos diz que as frequências de ressonância são múltiplos inteiros da menor frequência de ressonância, $f = v/2L$, que corresponde a $n = 1$. O modo de oscilação com a menor frequência é chamado de modo fundamental ou primeiro harmônico. O segundo harmônico é o modo de oscilação com $n = 2$, o terceiro harmônico é o modo com $n = 3$, e assim por diante. As frequências associadas a esses modos costumam ser chamadas de f_1 , f_2 , f_3 , e assim por diante. O conjunto de todos os modos de oscilação possíveis é chamado de série harmônica, e n é chamado de número harmônico do n ésimo harmônico.

Para uma corda submetida certa tensão cada frequência de ressonância corresponde a certo padrão de oscilação. Assim, se a frequência está na faixa de sons audíveis é possível "ouvir" a forma da corda. A ressonância também pode ocorrer em duas dimensões e em três dimensões.

Pitágoras e os instrumentos com cordas

Pitágoras, filósofo e matemático grego, teve uma grande contribuição para o desenvolvimento da música, em particular, na construção de instrumentos com cordas.

Ele teria observado os sons produzidos por martelos de diferentes pesos em uma oficina de ferreiro, e estes sons proporcionavam uma sensação agradável possuindo uma harmonia entre si. Tais martelos teriam pesos diferentes e, por meio desta observação colocou os pesos sobre as cordas iguais e percebeu que foi produzidos sons consonantes correspondentes.

Fig. 10 Pitágoras e o monocórdio



Fonte: (PRADO, 2010, p. 41).

Ressaltaremos o significado das oitavas, quartas e quintas: Na música alguns intervalos de uma escala tem nomes específicos, como a relação de 1/1 que é chamada de uníssono, de 1/2 que é chamada de oitava, 2/3 de quinta e 3/4 de quarta. Em geral, a oitava é lida como intervalo de referencia na formação das escalas e os outros intervalos são subdivisões da mesma.

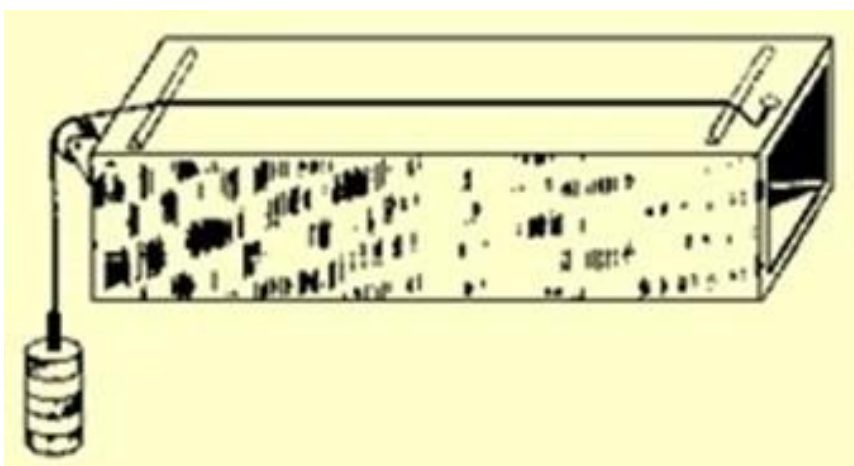
Fig. 11 Intervalos musicais



Fonte: (Wikipedia, 2020.)

Pitágoras estabeleceu uma relação existente entre a harmonia musical e os números. Ele teria esticado uma corda musical que produzia um som que tomou como fundamental, o tom. Fez marcas na corda que a dividiam em doze secções iguais, este instrumento mais tarde seria chamado de monocórdio, o qual se assemelha a um violão, mas com apenas uma corda.

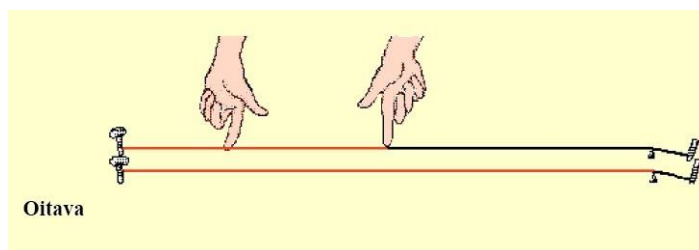
Fig. 12 exemplo de monocórdio



Fonte: (Clubes.obmep, 2021) <https://url.gratis/eUEfjJ> <acesso em 26 dez. 2021>

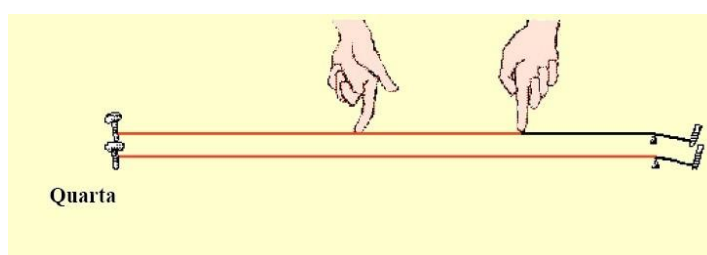
Ao tocar uma das marcas correspondente a $1/2$ do comprimento da corda, observou que foi produzida a oitava, quando tocava outra marca correspondente a $3/4$ do comprimento da corda resultava a quarta e ao tocar outra correspondente a $2/3$ do comprimento resultava-se na quinta.

Fig. 13 metade do comprimento da corda



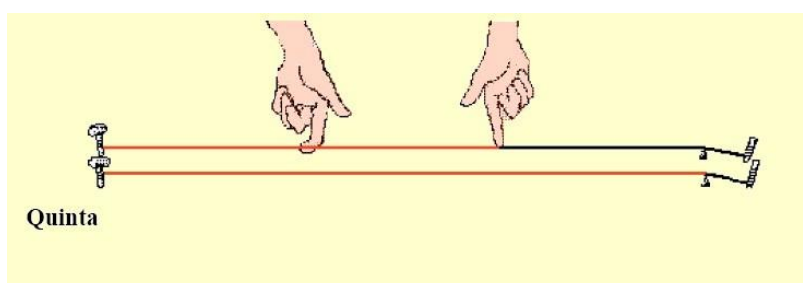
Fonte: (Cecilia Battaglia, 2020) <https://url.gratis/kqF3wV> <acesso em 26 dez. 2021>

Fig. 14 3/4 da corda



Fonte: (Cecilia Battaglia, 2020) <https://url.gratis/kqF3wV> <acesso em 26 dez. 2021>

Fig. 15 2/3 da corda



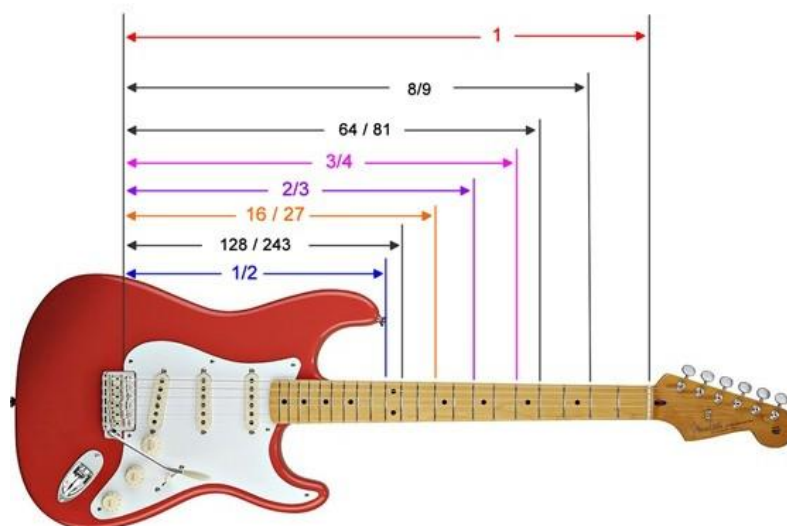
Fonte: (Cecilia Battaglia, 2020) <https://url.gratis/kqF3wV> <acesso em 26 dez. 2021>

Sendo assim as frações $1/2$, $3/4$, $2/3$ correspondiam à oitava; à quarta e à quinta, respectivamente.

A observação feita por Pitágoras pode ser ressaltada nos dias de hoje, em uma guitarra, já que posicionando o dedo na casa determinada pelos trastes 11 e 12 de uma guitarra, faz com que a corda que produz som, seja exatamente a metade do seu comprimento total sem dedo em qualquer casa, isto significa que esta metade, produzirá o dobro da frequência de vibração da corda “solta”, tornando-se a mesma nota, mas uma oitava acima.

A frequência da nota aumenta diretamente com a diminuição do comprimento da corda. Esta é uma parte física fundamental de todos os instrumentos de cordas.

Fig. 16 comprimento da corda de uma guitarra



Fonte: (SIMMI´2016) <https://url.gratis/xN051a> <acesso em 26 dez. 2021>

Aula 3

Experimento de baixo custo

Nos baseamos na proposta de Cavalcante et al, 2004 e 2013. Nos atentamos neste projeto ao estudo de ondas estacionarias em cordas e o desenvolvimento de um equipamento que pudesse ser reproduzido com facilidade e baixo custo, lançando mão de dispositivos móveis como tablets e Smartphones (Vieira, 2013):

- Software para gerar os sinais “SweepGen (para PC)” e “ToneGenerate (para celular)”.
- Caixa de som simples 3W de potência.
- Base de madeira.
- Barbante com um peso colado a caixa de som através de um pino
- Polia
- PC ou Celular.
- Cola

Fig. 17 experimento desenvolvido



Fonte: Próprio Autor, 2021.

Descrição da montagem

A Montagem consiste de uma base de madeira em que fixamos em uma de suas extremidades uma roldana e na outra uma caixa de som com aproximadamente 30 cm de distância da roldana. O gerador de sinais é proveniente de um software gratuito SweepGen instalado no PC (versão Windows) que faz vibrar uma caixa de som conectada a sua saída de áudio. Um barbante/corda é fixado em um pino colado diretamente na membrana da caixa de som. A corda é tracionada por um peso que pode ser alterado aumentando e diminuindo a tração na corda. O comprimento da corda pode ser alterado arrastando o alto falante sobre a base de madeira. Para este experimento mantivemos o comprimento $L = 29\text{cm}$.

Depois de montado o equipamento sugere que o professor tome medidas do barbante, tais como sua massa e comprimento e densidade linear. Calcule a massa do peso utilizado na extremidade do barbante, que será usado para calcular a densidade linear do barbante. Em seguida produza a fundamental e os seus harmônicos em sala de aula. A partir da frequência encontrada e da medida de comprimento utilizada na madeira, tem-se a velocidade de propagação.

Logo em seguida utilize a formula:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Calcule a densidade linear e compare as duas densidades, faça as discussões em sala de aula para despertar a curiosidade dos alunos para que momentos posteriores encontrem as respostas.

Para efeitos de compreensão podemos comparar a densidade linear do barbante com de instrumento musical como por exemplo violão e guitarra conforma (Santos et al; 2013) Fig. 0. :

Fig. 18 Densidade linear da corda Mi do violão e da corda Mi da guitarra

Modos normais - Violão - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (5,53 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,3	165,0	246,8	329,6	411,9	$82,40 \pm 0,03$
5	110,3	221,3	332,0	442,0	552,0	$110,5 \pm 0,05$
10	146,0	294,3	441,0	587,7	734,0	$146,8 \pm 0,08$
15	196,0	396,0	592,3	790,5	990,9	$197,8 \pm 0,10$

Modos normais - Guitarra - 6ª corda E1 (Mi1)						
$\mu = (7,13 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{ kg/m}$						
Casa	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	α (Hz)
0	82,1	164,5	246,8	329,7	411,1	$82,29 \pm 0,05$
5	109,5	219,1	328,8	438,3	550,6	$109,8 \pm 0,1$
10	145,4	291,3	438,3	584,3	735,3	$146,5 \pm 0,3$
15	193,6	389,0	584,4	783,0	983,0	$195,9 \pm 0,4$

Fonte: (SANTOS, E. M.; MOLINA, C.; TUFAILE, A. P.B, p. 6).

Vemos pela Fig. 18. que a densidade linear da 6ª corda do violão (Mi) é aproximadamente 10 vezes maior que o barbante utilizado, essa diferença se dá pelo fato da corda de violão suporta uma tensão maior. Com isso podemos compreender o por que do material desejado para se utilizar no violão, pois se aplicássemos a mesma tensão no barbante este não resistiria e arrebentaria.

Na Fig. 18 também é comparada a densidade linear do violão com a guitarra, o fator do material da corda bem como o comprimento do braço da guitarra ser diferente do violão influenciam, porém podemos até dizer que a tensão na guitarra é maior devido a sua densidade ser maior e poder resistir maior a tensão.

A aplicação de uma tensão maior ou menor implica na afinação das cordas, por exemplo, quanto maior a tensão a afinação do instrumento sobe e quanto menor a tensão a afinação desce, falando em miúdos quanto maior a tensão maior a frequência e quanto menor a tensão menor a frequência.

Por isso para se afinar um instrumento precisamente usa o afinador pois ele dá precisamente a frequência da nota desejada e quão próximo a afinação do instrumento esta

Aula 4

Esta aula será usada para exercícios no intuito de sedimentar aqui os conteúdos ministrados em aulas anteriores, os exercícios a serem usados fica a critério do professor que se utilizar desse material de apoio, pois dependerá de como conduzirá a turma. No entanto na aula 3 existe uma atividade a ser realizada para calcular a densidade linear da corda, poderá se utilizar de tal atividade para explorar na aula 4.

Os exercícios aqui propostos foram todos retirados de questões de concursos públicos de todo o Brasil para níveis diferentes e bancas diferentes, mostrando que os assuntos aqui mostrados são importantes. Segue os exercícios propostos resolvidos

Exercícios proposto

1. **(EEAR-2020 adaptada)** As ondas sonoras podem se propagar em diversas frequências. Considerando as qualidades do som, analise as afirmações a seguir.

I – O som é mais grave quanto maior for a sua frequência.

II – Sons de mesma altura e mesma intensidade emitida por fontes sonoras distintas podem ser diferenciados através de seus respectivos timbres.

III – Dizer que uma mulher tem voz aguda é o mesmo que dizer que o som que é emitido por ela é de alta intensidade.

Está correto o que se afirma em:

- a) II, somente
- b) I, somente
- c) I, II e III
- d) II e III

R: Item I falso - som é mais agudo quanto maior for a sua frequência.

Item II – verdadeiro - Sons de mesma altura e mesma intensidade emitida por fontes sonoras distintas podem ser diferenciados através de seus respectivos timbres.

Item III – **falso** - Dizer que uma mulher tem voz aguda é o mesmo que dizer que o som que é emitido por ela é de alta **frequência**.

2. **(ITA–2021 adaptada)** Um violão é um instrumento sonoro de seis cordas de diferentes propriedades, fixas em ambas as extremidades, acompanhadas de uma caixa de ressonância. Diferentes notas musicais são produzidas tangendo uma das cordas, podendo-se ou não alterar o seu comprimento efetivo, pressionando-a com os dedos em diferentes pontos do braço do violão. A respeito da geração de sons por esse instrumento são feitas as seguintes afirmações:

I – Uma corda de nylon e uma de aço, afinadas na mesma frequência fundamental, geram sons de timbres distintos.

II – Ao pressionar uma corda do violão, o musicista gera um som de frequência maior e comprimento de onda menor em comparação ao som produzido pela corda tocada livremente.

III – Quando o musicista pressiona a corda do violão, quanto mais próxima da “boca” do violão mais grave é o som.

Considerando V como verdadeiro e F como falsa, as afirmações são respectivamente.

- a) FVF
- b) VFV
- c) VVF
- d) VVV

R: item I –verdadeiro- Uma corda de nylon e uma de aço, afinadas na mesma frequência fundamental, geram sons de timbres distintos.

Item II – verdadeiro - Ao pressionar uma corda do violão, o musicista gera um som de frequência maior e comprimento de onda menor em comparação ao som produzido pela corda tocada livremente. comprimento de onda e frequência são grandezas inversamente proporcionais, quando a corda pressionada ela terá um comprimento menor do que ela solta.

Item III – falso - Quando o musicista pressiona a corda do violão, quanto mais próxima da “boca” do violão mais **agudo** é o som.

Resposta letra c)

3. **(NUCEPE/UESPI–SEMEC-2019)** A altura de um som musical corresponde à sensação que permite distinguir os sons mais graves dos mais agudos. Qual é, então a característica física de uma onda sonora associada à altura do som?

- a) Volume
- b) Frequência
- c) Amplitude.
- d) Intensidade

R: Altura: Alto (agudo) ou baixo (grave) relacionado à frequência resposta letra b)

4. **(FUNDEP-2019)** Considere que João está gritando quando seu professor de Física entra na sala de aula. Aproveitando a última aula sobre ondas sonoras, seu professor o adverte:

“- João, que som forte e baixo! De longe reconheci seu timbre!”

As palavras destacadas na fala do professor se referem, respectivamente, a

- a) Amplitude, frequência e forma da onda.
- b) Forma da onda, amplitude e frequência.
- c) Frequência, amplitude e forma da onda.
- d) Comprimento de onda, frequência e forma a onda.

R: qualidades fisiológicas do som intensidade: forte ou fraco relacionado a amplitude.

Altura: Alto (agudo) ou baixo (grave) relacionado à frequência. Timbre: qualidade que identifica a fonte sonora. Relacionado a onda resultante de outras.

Resposta letra a)

5. **(EEAR–2019)** Assinale a alternativa que completa INCORRETAMENTE a frase abaixo.

Em uma orquestra formada por vários instrumentos musicais é possível que instrumentos diferentes emitam sons com _____ iguais.

- a) Timbres
- b) Frequências
- c) Intensidades
- d) Comprimentos de ondas

R: qualquer fonte sonora pode ter: frequências; intensidades; comprimentos de ondas iguais às outras, mas o timbre não.

Como a questão quer a INCORRETA resposta letra a)

6. **(CPCON UEPB–Prefeitura de Cuitegi-2019)** O som é uma onda longitudinal, que se propaga em um meio material, sendo que, para ser produzido, um corpo material tem que vibrar. Por exemplo: quando uma pessoa fala, o som que ela emite é produzido pelas vibrações de suas cordas vocais. Sobre os fenômenos sonoros são feitas as seguintes afirmações.

I – O som pode se propagar em um meio material qualquer, entretanto, ao contrário do que acontece com a luz, o som não se propaga no vácuo.

II – Quando um rádio está ligado com seu volume máximo, dizemos que o som por ele emitido é de grande intensidade.

III – A frequência de um som caracteriza sua percepção como grave ou agudo. Um som de pequena frequência é agudo e um som de grande frequência é grave.

É verdade o que se afirma apenas em

- a) I e II
- b) I
- c) II
- d) II e III
- e) III

R: Item I – verdadeiro : O som pode se propagar em um meio material qualquer, ao contrário do que acontece com a luz, o som não se propaga no vácuo.

Item II – verdadeiro: Quando um rádio está ligado com seu volume máximo, dizemos que o som por ele emitido é de grande intensidade.

Item III – falso: A frequência de um som caracteriza sua percepção como grave ou agudo. Um som de pequena frequência é grave e um som de grande frequência é agudo.

Resposta letra a)

7. **(EEAR-2020)** Um professor de música esbraveja com seu discípulo: “Você não é capaz de distinguir a mesma nota musical emitida por um violino e por uma viola!”. A qualidade do som que permite essa distinção à que se refere o professor é a (o)

- a) Altura.
- b) Timbre.
- c) Intensidade.
- d) Velocidade de propagação.

R: A qualidade fisiológica que identifica o som é o timbre

Resposta letra b)

8. **(IDECAN–SEARH-2016 adaptada)** Uma corda de violão de comprimento L produz ao ser tocada um som cuja frequência é 247,5 Hz. Diminuindo pela metade o comprimento da parte vibrante, o novo som produzido ao se tocar essa corda de acordo com a tabela corresponde à nota:

Nota	Frequência (Hz)
dó	264
ré	297
mi	330
fá	352
sol	396
lá	440
si	495
dó	528

- a) Dó
- b) Ré
- c) Sol
- d) Si

R: por ser o mesmo material a velocidade de propagação será a mesma então ao analisarmos a fórmula $v = \lambda f$, podemos ver que o comprimento de onda e a frequência são grandezas inversamente proporcionais. Sendo assim a frequência irá ser dobrada. $247,5 \times 2 = 495 \text{ Hz}$.

Resposta letra d)

9. **(IFPA-Técnico de laboratório-2016)** Um violinista com o intuito de afinar seu violão utiliza um diapasão de 440 Hz, o qual, se aproximando de uma das cordas, de comprimento 1,0 m, esta entra em ressonância formando um padrão de onda estacionária contendo cinco nós e quatro ventres (4º harmônico). Dessa forma, a velocidade da onda na referida corda, em m/s, vale:

- a) 55
- b) 110
- c) 220
- d) 440
- e) 880

R: para o 4^o harmônico temos: $\frac{4\lambda}{2} = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$$v = \frac{440}{2} = 220$$

Letra b)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa sequência didática foi elaborada como uma proposta de ensino para os professores de ensino médio que pretendem dar uma aula diferenciada, buscando uma interdisciplinaridade com a música. Nesse aspecto, pela tendência natural humana pelo gosto da música, os alunos tendem a estarem mais abertos para o aprendizado e a partir daí o professor colocará os conceitos físicos aqui abordados.

A sequência foi concebida de modo que as primeiras aulas são conhecimentos e conceitos que serão usados nas últimas aulas, assim como no experimento. O material é uma sugestão, mas pede-se que os conceitos sejam ministrados de modo cronologicamente iguais.

Vale salientar que o produto aqui apresentado de nenhuma forma está acabado, pois ele serve como um guia, material de apoio e pode ser usado parcial ou integralmente, ficando a critério do educador como irá usar o presente material. Podem-se usar simuladores, outros experimentos que enriqueçam as aulas.

Por fim, é de grande estima que ao menos esse trabalho, inspire professores a darem aulas agradáveis, e os inspirem a partir desse produto a produzirem outros trabalhos com as mesmas ideias.

REFERÊNCIAS

CHIERECCHI, R. O Som da Física. 2013. 224 p. Dissertação (Mestrado Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo.

(CAVALCANTE, 2004) M. A. Cavalcante, C. R. C. Tavoraro, **Ondulatória e acústica através de experimentos assistidos por computador**. In: Anais do IX Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Física, Jaboticatubas, MG, 2004.

CAVALCANTE, M. A.; PEÇANHA, R.; TEIXEIRA, A. C. **Ondas estacionárias em cordas e determinação da densidade linear de um fio**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 2, 2013.

HALLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J., **Fundamentos de física 2**. 9ª edição, vol. 2, editora LTC, 2012.

H. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica 2: **Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**, 4a edição, Editora Edgard Blücher, 2002

PRADO, L. A. G. *Matemática, física e música no Renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica para um ensino interdisciplinar*. 2010. 110 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

PEREIRA, R. A. *A física da música no renascimento: uma abordagem histórico-epistemológica*. 2010. 107 p. Dissertação (Mestrado Ensino de Física) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo